TD 11 - Comparaisons de fonctions réelles et développements limités

▷ **Exercice 1 :** Déterminer dans chaque cas si l'une des deux fonctions est négligeables devant l'autre au voisinage du point considéré.

1. $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \ln(x)$ en $+\infty$.
2. $f(x) = x$ et $g(x) = \ln(x + x^2)$ en $+\infty$.
3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ en 0^+.
4. $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ en 0^+.

▷ **Exercice 2 :** Déterminer un équivalent simple de chacune des fonctions suivantes au voisinage de x_0 et en déduire la limite en x_0.

1. $f(x) = x^3 - 2x + 3$ en $x_0 = 0$ puis en $x_0 = +\infty$.
2. $g(x) = \dfrac{x^3 + x - 1}{5x^4 + 2x^2}$ en $x_0 = 0$ puis en $x_0 = +\infty$.
3. $h(x) = e^{x^2} - 1$ en $x_0 = 0$.
4. $i(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} - 1$ en $x_0 = +\infty$.
5. $j(x) = \dfrac{e^{-x^2} - 1}{x^2 + x}$ en $x_0 = 0$.
6. $k(x) = e^x - 2 + 3x$ en $x_0 = 1$.
7. $l(x) = \ln(1 + x)$ en $x_0 = +\infty$.
8. $m(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ en $x_0 = +\infty$.
9. $n(x) = \frac{x - \ln(x)}{x+1}$ en $x_0 = 0$ puis en $x_0 = +\infty$.

▷ **Exercice 3 :** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les développements limités d'ordre 0 de $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln(1 + x)$ et de $x \mapsto (1 + x)^\alpha$ en 0.
2. Déterminer les développements limités d'ordre 1 de $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln(1 + x)$ et de $x \mapsto (1 + x)^\alpha$ en 0.
3. Déterminer les développements limités d'ordre 2 de $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln(1 + x)$ et de $x \mapsto (1 + x)^\alpha$ en 0.
4. En déduire les équivalents usuels.

▷ **Exercice 4 :** Calculer les développements limités de f à l'ordre 2 au point a.

1. $f : x \mapsto \ln(2 + x)$ et $a = 0$;
2. $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $a = 0$;
3. $f : x \mapsto e^{x+1}$ et $a = 0$;
4. $f : x \mapsto e^{x+1}$ et $a = -1$;
5. $f : x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$ et $a = 1$;
6. $f : x \mapsto x\sqrt{1 - 3x}$ et $a = 0$.

▷ **Exercice 5 :** Soit g la fonction définie sur $I =]-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, \frac{1}{4}[$ par :

$$\forall x \in I, \quad g(x) = \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-4x}}{x}.$$

1. Montrer que g peut être prolongée par continuité en 0.
2. Montrer que ce prolongement est dérivable en 0.

▷ **Exercice 6 :** Soit f la fonction définie sur $]-1, 1[$ par

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{1+x}.$$

Faire l'étude locale de f au voisinage de 0 (on donnera l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de 0).

▷ **Exercice 7 :** Pour chaque suite, à l'aide d'au moins un développement limité dire si il s'agit du terme général d'une série numérique convergente ou divergente.

1. $e^{\frac{n}{n^2+1}} - 1$
2. $\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$
3. $e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} + 2\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$
4. $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$
5. $\frac{1}{n}\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{\frac{1}{n}}$.