TD 12 - Intégrales impropres de fonctions positives

▷ **Exercice 1 :**

1. Calculer pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\int_a^b t^2 e^{-t} dt$.
2. Par un argument de majoration, justifier $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$ est convergente.
3. Par un argument de non-majoration, justifier $\int_{-\infty}^{0} t^2 e^{-t} dt$ est divergence.

▷ **Exercice 2 :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier la nature des intégrales suivantes en utilisant le théorème de comparaison par inégalité.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$,
2. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt$,
3. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3 \ln(t)} dt$.

▷ **Exercice 3 :** Étudier la nature des intégrales suivantes en utilisant le théorème de négligeabilité.

1. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2+x}} dx$,
2. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$,
3. $\int_1^{+\infty} e^{\frac{1}{t}} dt$,
4. $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt$, $k \in \mathbb{N}$,
5. $\int_1^{+\infty} \frac{1+\ln(t)}{t+t^2+3t^4} dt$,
6. $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt$.

▷ **Exercice 4 :** Étudier la nature des intégrales suivantes en utilisant le théorème d'équivalence.

1. $\int_0^{+\infty} \frac{t^2+2t}{t^4+1} dt$,
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-x+1} dx$,
3. $\int_1^{+\infty} \frac{\frac{1}{t}}{e^{\frac{1}{t}}-1} dt$,
4. $\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{t}{2t^2+1}} dt$,
5. $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt$.

▷ **Exercice 5 :**

1. Montrer que pour $x > 0$, l'intégrale
$$J(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$
est convergente.
2. (a) Montrer que $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt = \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$.

   (b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que $J(x) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.