TD 08 - Révisions : Variables aléatoires discrètes

▷ **Exercice 1 :** Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![0, 4]\!]$ et $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{10}$, $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2}$.

1. En supposons que les évènements $(X = 3)$ et $(X = 4)$ sont équiprobables, calculer $\mathbb{P}(X = 3)$ et $\mathbb{P}(X = 4)$.
2. Tracer la fonction de répartition de X.
3. Justifier que X admet une espérance et une variance.
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

▷ **Exercice 2 :** On lance deux dés à 6 faces successivement et soit X la variable aléatoire correspondant au maximum des deux dés.

1. Déterminer $\mathbb{P}(X = k)$ pour tout k.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Donner le code Python permettant de tracer cette fonction.
4. Calculer l'espérance et la variance de X.

▷ **Exercice 3 :** Une entreprise souhaite recruter un cadre. n personnes se présentent pour le poste. Chacun d'entre eux passe à tour de rôle un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in]0, 1[$.On définit la variable aléatoire X par $X = k$ si le k ème candidat est engagé et $X = n + 1$ si personne n'est engagé.

1. Déterminer la loi de X.
2. Quelle est la valeur minimal de p pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter l'un des candidats ?
3. En déduire l'espérance de X. (On admettra que pour $x \neq 1$, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}$).

▷ **Exercice 4 :** Dans chaque situation reconnaître la loi usuelle ou exprimer la variable aléatoire en fonction de loi usuelle puis déterminer l'univers associée, l'espérance et la variance :

1. On lance un dé bien équilibré et l'on gagne 1 euro lorsque l'on obtient un 6. On note X le gain final.
2. On lance dix fois un dé bien équilibré et l'on gagne 1 euro à chaque fois que l'on obtient un 6. On note X le gain final.
3. Soit $p \in]0, 1[$ et soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = -1) = 1 - p$.

   (a) $Y = \frac{1+X}{2}$; (b) $Z = \frac{1-X}{2}$.

4. Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules rouges. On pioche 5 boules avec remise dans cette urne. On gagne 2 points pour chaque boule blanche tirée et l'on perd 3 pour chaque boule rouge.

(a) On note X le nombre de boule blanche tirés;

(b) On note Y le gain final.

5. On lance un dé équilibré à 8 faces et l'on s'arrête dès qu'on obtient 7 ou 8. On note N le nombre de lancer nécessaire.
6. Soit $p \in]0,1[$ et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_X(n) = 1-(1-p)^n$.

▷ **Exercice 5 :** Un individu lance une pièce 10 fois. Il prétend que c'est avec une pièce normale qu'il a le plus de chances d'avoir autant de piles que de faces.

1. On suppose que p est la probabilité d'obtenir pile avec la pièce. Calculer la probabilité d'avoir autant de pile que de face.
2. Donner le code python qui permet de tracer cette probabilité en fonction de p sur $[0,1]$.
3. En posant une fonction bien choisit et en l'étudiant, l'assertion de l'individu est-elle juste ?

▷ **Exercice 6 :** Une urne contient des boules blanches en proportion $p \in]0,1[$ et des boules noires en proportion $q = 1-p$. On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule avec remise et l'expérience s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et une boule noire.
On considère les VARs X "nombre de tirage effectuées" et Y 'nombre de boules blanches obtenues".

1. Donner $X(\Omega)$, puis montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\mathbb{P}(X=k) = p^{k-1}q + pq^{k-1}$.
2. Montrer que X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.
3. Donner $Y(\Omega)$. Calculer pour tout $k \geq 2$, $\mathbb{P}(Y=k)$. En déduire la loi de Y.

▷ **Exercice 7 :** [EML 2007] Soit Y une variable aléatoire dont la loi est donnée par $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y=n) = \left(1-\frac{1}{e}\right)e^{-n}.$$

1. Montrer que la variable aléatoire $Y+1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance et la variance de Y.
2. Soit U une variable de Bernoulli telle que $\mathbb{P}(U=1) = \mathbb{P}(U=0) = \frac{1}{2}$. On suppose que les variables aléatoires U et Y sont indépendantes et on note $T = (2U-1)Y$.

   (a) Justifier T est une variable aléatoire discrète et déterminer sa loi.

   (b) Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance $E(T)$ et calculer $E(T)$.

   (c) Vérifier que $T^2 = Y^2$. En déduire que la variable aléatoire T admet une variance $V(T)$ et calculer $V(T)$.