TD 09 - Couples de variables aléatoires discrètes

▷ **Exercice 1 :** Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. On note N le nombre de voiture arrivant au péage en 1 heure. N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur guichet au hasard et indépendamment les uns des autres. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au guichet numéro 1 en une heure.

1. Combien de voitures arrivent en moyenne au péage en une heure ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}_{N=n}(X = k)$.
3. Calculer la loi marginale de X.
4. Combien de voitures arrivent en moyenne au guichet 1 en une heure ?

▷ **Exercice 2 :** On admet que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{6}$. Soit $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et on pose $a_{i,j} = \frac{1}{(i+j^2)(i+j^2+1)}$.

1. Déterminer a et b tels que pour tout $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$,
$$a_{i,j} = \frac{a}{i + j^2} + \frac{b}{i + j^2 + 1}.$$
2. En déduire la convergence double de la série double $\sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} a_{i,j}$ et calculer sa somme.
3. Déterminer λ pour que la famille $\{\lambda a_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ définissent la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires.

▷ **Exercice 3 :** On lance deux dès à quatre faces numérotées de 1 à 4, l'un bleu, l'autre rouge. On suppose les dés équilibrés et les lancers indépendants. On suppose que l' expérience peut être modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on note X la variable aléatoire donnant la valeur du dé bleu et Y celle donnant la somme des valeurs des deux dés.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Déterminer la loi de Y.
3. Déterminer la loi de X sachant $[Y = 5]$.

▷ **Exercice 4 :** Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on a
$$\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{e2^{i+1}j!}.$$

1. (a) Calculer la première loi marginale du couple (X, Y).
   (b) On pose $X' = X + 1$. A l'aide de la loi de X', calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. Calculer la deuxième loi marginale du couple (X, Y) puis $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Montrer que $\mathbb{P}(X = Y) = \frac{1}{2\sqrt{e}}$.

▷ **Exercice 5 :** Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes où X et Y suivent une même loi géométrique de paramètre p. On note $Z = X + Y$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(Z = n) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}.$$
2. Montrer que Z admet une espérance et la calculer de deux manières différentes.

▷ **Exercice 6 :** Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes où X et Y suivent une même loi géométrique de paramètre p.

1. Déterminer la loi du minimum (on pourrait calculer $\mathbb{P}(\min(X, Y) = 1)$ séparément puis reconnaitre une loi usuelle).
2. Montrer que $\min(X, Y)$ admet une espérance et la calculer.
3. Déterminer la loi du maximum (on pourrait calculer $\mathbb{P}(\min(X, Y) = 1)$ séparément).
4. Montrer que $\min(X, Y)$ admet une espérance et la calculer de deux manières différentes.

▷ **Exercice 7 :** Soit $p \in]0, 1[$ et soit n un entier valant au moins 3. On considère n joueurs de football et ils tirent chacun deux pénalitys. On suppose que chaque joueur a une probabilité p de marquer et que les deux lancers sont indépendants. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de joueur ayant réussi leur premier penalty, Z la variable aléatoire correspondant au nombre de joueurs ayant réussi au moins un pénalty et $Y = Z - X$.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Z.
3. Que représente Y. Déterminer la loi de Y.
4. Calculer $Cov(X, Y)$.

▷ **Exercice 8 :** Soit n un entier valant au moins 2. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire deux boules successivement et sans remise dans cette urne. Soit X la variable aléatoire égale au premier numéro obtnue et Y la variable aléatoire égale au deuxième numéro obtenu.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) ainsi que ses lois marginales.
2. Montrer que $\mathbb{E}(XY)$ existe et que $\mathbb{E}(XY) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}$.
3. Justifier de l'existence d'un moment d'ordre 2 pour X et Y.
4. En déduire le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.
5. Que peut-on remarquer dans le cas $n = 2$? Expliquer le phénomène observé.
6. Calculer $\mathbb{V}(X + Y)$.