## *TD 14 - Suites de variables aléatoires discrètes*

▷ **Exercice 1 :** Soit $n$ un entier valant au moins 2. Une urne continent $n$ boules numérotées de 1 à $n$ et indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise dans l'urne. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $X_i$ la variable aléatoire correspondant au nombre d'obtentions du numéro $i$ sur les $k$ premiers tirages.

1. Déterminer pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ la loi de $X_i$.
2. Les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont-elles mutuellement indépendantes ?
3. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.
   (a) Déterminer la loi de $X_i + X_j$.
   (b) En déduire $Cov(X_i, X_j)$.

▷ **Exercice 2 :**

1. Démontrer la propriété 14.2.3.
2. Démontrer la propriété 14.2.6.

▷ **Exercice 3 :** Soit $(p \in ]0, 1[$ et soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = p \text{ et } \mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$. On note $p_n = \mathbb{P}(Y_n = 1)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer de deux manières différentes l'espérance de $Y_n$ pour en déduire une expression de $p_n$ en fonction de $p$.
2. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter le résultat.

▷ **Exercice 4 :** On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la loi géométrique de paramètre $p \in ]0, 1[$.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En admettant que pour $l \leq m$, $\sum_{i=l}^{m} \binom{i}{l} = \binom{m+1}{l+1}$, montrer par récurrence sur $n$ que la loi de $S_n$ est donnée par pour tout entier k valant au moins $n$
$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}.$$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $S_n$ admet une espérance et une variance et les calculer.
3. Que peut-on dire sans calcul de $\sum_{k\geq n} \mathbb{P}(S_n = k)$ ?
4. En déduire que pour tout $x \in ]0, 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}.$$

▷ **Exercice 5 :** [EML Lyon 2017] On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges. On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard et on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $B_k$ l'évènement "On obtient une boule bleue au $k$-ième tirage" et $R_k$ l'évènement "On obtient une boule rouge au $k$-ième tirage".
On définit la variable aléatoire $Y$ égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire $Z$ égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$.
   (b) La variable aléatoire $Y$ admet-elle une espérance ? une variance ?
2. Déterminer la loi de $Z$. La variable aléatoire $Z$ admet-elle une espérance ? une variance ?

On définit pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire $X_k$ égale à 1 si l'on obtient une boule rouge au $k$-ème tirage et égale à 0 sinon.
On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire $S_n$ égale au nombre de boules rouges obtenus au cours des $n$ premiers tirages.

3. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une relation entre $S_n$ et certaines variables aléatoires $X_k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
4. Déterminer la loi de $X_1$, son espérance et sa variance.
5. (a) Déterminer la loi du couple $(X_1, X_2)$.
   (b) En déduire la loi de $X_2$.
   (c) Les variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ sont-elles indépendantes ?
6. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(R_1 \cap ... \cap R_k \cap B_{k+1} \cap ... \cap B_n) = \frac{2(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!}$.
   (b) Justifier $\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k}\mathbb{P}(R_1 \cap ... \cap R_k \cap B_{k+1} \cap ... \cap B_n)$,
   puis en déduire $\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$.
7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n$ admet une espérance et $\mathbb{E}(S_n) = \frac{2n}{3}$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$
   (a) Montrer $\forall k \in [\![0, 1]\!]$, $\mathbb{P}_{S_n=k}(X_{n+1} = 1) = \frac{k+2}{n+3}$.
   (b) En déduire $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{\mathbb{E}(S_n)+2}{n+3}$.
   (c) Déterminer alors la loi de la variable aléatoire $X_{n+1}$. Que remarque-t-on ?