DS 06 - Cours sur les séries et applications linéaires

▷ **Exercice 1 :** Énoncer tout les résultats de comparaisons sur les séries à termes positifs.

Voir le cours !

▷ **Exercice 2 :** On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+3y+3z, y, x-3y-z) \end{array}.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Calculer f^2.
3. On admet que

$$f^3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (4x+9y+12z, y, 4x-9y-4z) \end{array}.$$

   Calculer $g : (x,y,z) \mapsto f^3((x,y,z)) - f^2((x,y,z) - 4f((x,y,z))$.
4. En déduire que f est un automorphisme et déterminer f^{-1}.

1. Soit $((x,y,z),(x',y',z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et montrons que

$$f(\lambda(x,y,z) + (x',y',z')) = \lambda f((x,y,z)) + f((x',y',z')).$$

   On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda(x,y,z) + (x',y',z')) &= f((\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')) \\ &= (\lambda x + x' + 3(\lambda y + y') + 3(\lambda z + z'), \lambda y + y', \lambda x + x' - 3(\lambda y + y') - (\lambda z + z')) \\ &= (\lambda x + 3\lambda y + 3\lambda z + x' + 3y' + 3z', \lambda y + y', \lambda x - 3\lambda y - \lambda z + x' - 3y' - z') \\ &= \lambda(x+3y+3z, y, x-3y-z) + (x'+3y'+3z', y', x'-3y'-z') \\ &= \lambda f((x,y,z)) + f((x',y',z')) \end{aligned}$$

   donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, soit que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} f^2((x,y,z)) &= f((x+3y+3z, y, x-3y-z)) \\ &= (x+3y+3z+3y+3(x-3y-z), y, x+3y+3z-3y-(x-3y-z)) \\ &= (x+3y+3z+3y+3x-9y-3z, y, x+3y+3z-3y-x+3y+z) \\ &= (4x-3y, y, 3y+4z) \end{aligned}$$

   On a donc
$$f^2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (4x-3y, y, 3y+4z) \end{array}.$$

3. Cela n'est pas demandé mais détaillons le calcul de f^3. Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}f^3((x,y,z)) &= f(f^2((x,y,z))) = f((4x-3y,y,3y+4z))\\ &= (4x-3y+3y+3(3y+4z),y,4x-3y-3y-(3y+4z))\\ &= (4x-3y+3y+9y+12z,y,4x-3y-3y-3y-4z)\\ &= (4x+9y+12z,y,4x-9y-4z)\end{aligned}$$

On a à présent :

$$\begin{aligned}g((x,y,z)) &= (4x+9y+12z,y,4x-9y-4z)-(4x-3y,y,3y+4z)-4(x+3y+3z,y,x-3y-z)\\ &= (4x+9y+12z-(4x-3y)-4(x+3y+3z),y-y-4y,\\ &\qquad 4x-9y-4z-(3y+4z)-4(x-3y-z))\\ &= ((4-4-4)x+(9+3-12)y+(12-12)z,-4y,\\ &\qquad (4-4)x+(-9-3+12)y+(-4-4+4)z)\\ &= (-4x,-4y,-4z) = -4(x,y,z)\end{aligned}$$

On a donc $g=-4Id_{\mathbb{R}^3}$.

4. Par l'écriture précédente, on a :

$$\begin{aligned}f^3-f^2-4f=-4Id_{\mathbb{R}^3} &\Leftrightarrow f\circ(f^2-f-4Id_{\mathbb{R}^3}) = -4Id_{\mathbb{R}^3}\\ & f\circ\left(\frac{-1}{4}f^2+\frac{1}{4}f+Id_{\mathbb{R}^3}\right) = Id_{\mathbb{R}^3}\end{aligned}$$

On en déduit donc que f est bijective d'inverse $f^{-1}=\dfrac{-1}{4}f^2+\dfrac{1}{4}f+Id_{\mathbb{R}^3}$. Comme f est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}^3$, il s'agit donc d'un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

▷ **Exercice 3 :** On considère l'application

$$g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\\ (x,y,z) & \mapsto & A\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x & 0\\ y & z\end{pmatrix}B\end{array}$$

où $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

1. Montrer que g est une application linéaire.
2. Calculer $\ker(g)$.
3. Sans calculer $Im(g)$, déterminer le rang de g.
4. Que peut-on dire quand à l'injectivité de g ? à la surjectivité ? à la bijectivité ?
5. Calculer $Im(g)$.

1. Soit $((x,y,z),(x',y',z'))\in(\mathbb{R}^3)^2$ et soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et montrons que

$$g(\lambda(x,y,z)+(x',y',z'))=\lambda g((x,y,z))+g((x',y',z')).$$

On a :

$$g(\lambda(x,y,z)+(x',y',z'))=g((\lambda x+x',\lambda y+y',\lambda z+z'))$$

$$
\begin{aligned}
&= A\begin{pmatrix} \lambda x + x' & \lambda y + y' \\ 0 & \lambda z + z' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda x + x' & 0 \\ \lambda y + y' & \lambda z + z' \end{pmatrix} B \\
&= A\left(\lambda \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & z' \end{pmatrix}\right) - \left(\lambda \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & z' \end{pmatrix}\right) B \\
&= \lambda A \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & z' \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} B - \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & z' \end{pmatrix} B \\
&= \lambda\left(A\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} B\right) + A\begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & z' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' & 0 \\ y' & z' \end{pmatrix} B \\
&= \lambda g((x,y,z)) + g((x',y',z'))
\end{aligned}
$$

On en déduit donc bien que g est une application linéaire.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$
\begin{aligned}
(x,y,z) \in \ker(g) &\Leftrightarrow g((x,y,z)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y + 2z \\ 0 & 3z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & x \\ y + z & y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -x + y + 2z \\ -y - z & -y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \\ -y - z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2z \\ -y = z \\ 3z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x = y = z = 0 \\
&(x,y,z) \in \{(0,0,0)\}
\end{aligned}
$$

On en déduit donc que $\ker(g) = \{(0,0,0)\}$.

3. Par le théorème du rang, on a l'égalité $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(g)) + rg(g)$ ainsi on a
$$rg(g) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(g)) = 3 - 0 = 3.$$

4. Comme la dimension du noyau est nulle, on a que g est injective. Comme $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4 \neq 3 = rg(g)$, on a que g n'est pas surjective et n'est donc pas bijective.

5. Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

—

$$
\begin{aligned}
f(e_1) = f((1,0,0)) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

—

$$\begin{aligned}
f(e_2) = f((0,1,0)) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}
f(e_3) = f((0,0,1)) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$Im(f) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right).$$