

▷ **Exercice 1 :** Énoncer tout les résultats de comparaisons sur les séries à termes positifs.

▷ **Exercice 2 :** On considère l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + 3y + 3z, y, x - 3y - z) .$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Calculer f^2 .
3. On admet que

$$f^3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (4x + 9y + 12z, y, 4x - 9y - 4z) .$$

Calculer $g : (x, y, z) \mapsto f^3((x, y, z)) - f^2((x, y, z)) - 4f((x, y, z))$.

4. En déduire que f est un automorphisme et déterminer f^{-1} .

▷ **Exercice 3 :** On considère l'application

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ (x, y, z) \mapsto A \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} B$$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que g est une application linéaire.
2. Calculer $\ker(g)$.
3. Sans calculer $\text{Im}(g)$, déterminer le rang de g .
4. Que peut-on dire quand à l'injectivité de g ? à la surjectivité? à la bijectivité?
5. Calculer $\text{Im}(g)$.