Programme

— Applications linéaires. Définition, notion d'endomorphismes, d'isomorphismes et d'automorphismes. Règles de calculs usuels. Image et noyau. Lien avec la dimension.Rang et Théorème du rang. Utilisation des bases.

— Matrice d'une application linéaire. Définitions. Noyau et image. Parallélismes dans le calcul. Rang d'une matrice, inversibilité. Notion de changement de base d'endomorphismes.

Questions de cours

1. Définitions du noyau et de l'image. Preuve qu'il s'agit d'espaces vectoriels. (Définition 7.2.1, propriété 7.2.3, définition 7.2.8 et propriété 7.2.10)
2. Soit h l'application définie sur $\mathbb{R}_2[x]$ par pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$h(P)(x) = xP(x+1) - (x+1)P(x).$$
Montrer que h est une application linéaire puis déterminer $\ker(h)$ et $Im(h)$. (TD 07, exercice 1 question 2 et morceaux de l'exercice 3)
3. Soit $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (x+3y+3z, y, x-3y-z) \end{array}$. Montrer que f est un endomorphisme puis en explicitant $g := f^3 - f^2 - 4f$ montrer que f est un automorphisme. Expliciter f^{-1}. (TD 07, exercice 2)
4. Soit g l'application linéaire définie sur $\mathbb{R}_2[x]$ par pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(P)(x) = x^2P'(x) - 2xP(x)$. Montrer que g est un endomorphismes de $\mathbb{R}_2[x]$. Déterminer la matrice de g lorsque $\mathbb{R}_2[x]$ est muni de la base canonique. (TD 07, Exercice 1 question 3 et exercice 5 avec des calculs de l'exercice 3).
5. Soit $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (2x-3y, x) \end{array}$ et soit $g = \pi Id_{\mathbb{R}^2}$. On admet que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$. Déterminer les matrices de f et g pour $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique puis pour $\mathbb{R}^2$ munit de la base $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$. Déterminer une relation matricielle pour les matrices associées à f et pour celle associées à g. (TD 07, Exercices 6 et 10)
6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2[x]$ associée à A dans la base canonique. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, f^n. (TD 07, exercice 9)