Programme

— Applications linéaires. Définition, notion d'endomorphismes, d'isomorphismes et d'automorphismes. Règles de calculs usuels. Image et noyau. Lien avec la dimension.Rang et Théorème du rang. Utilisation des bases.

— Matrice d'une application linéaire. Définitions. Noyau et image. Parallélismes dans le calcul. Rang d'une matrice, inversibilité. Notion de changement de base d'endomorphismes.

— Variable aléatoire discrètes : révisions de première année. Lois d'une variable aléatoires discrètes, calculs d'espérance et de variance. Théorème de transferts. Loi usuelles.

Questions de cours

1. Soit g l'application linéaire définie sur $\mathbb{R}_2[x]$ par pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(P)(x) = x^2P'(x) - 2xP(x)$. Montrer que g est un endomorphismes de $\mathbb{R}_2[x]$. Déterminer la matrice de g lorsque $\mathbb{R}_2[x]$ est muni de la base canonique. (TD 07, Exercice 1 question 3 et exercice 5 avec des calculs de l'exercice 3).
2. Soit $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (2x-3y,x) \end{array}$ et soit $g = \pi Id_{\mathbb{R}^2}$. On admet que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$. Déterminer les matrices de f et g pour $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique puis pour $\mathbb{R}^2$ munit de la base $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$. Déterminer une relation matricielle pour les matrices associées à f et pour celle associées à g. (TD 07, Exercices 6 et 10)
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2[x]$ associée à A dans la base canonique. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, f^n. (TD 07, exercice 9)
4. n personnes se présentent pour un poste. Chacun d'entre eux passe à tour de rôle et le premier qui réussit l'entretien est engagé. La probabilité de réussir est $p \in]0,1[$. On définit la variable aléatoire X par $X = k$ si le k ème candidat est engagé et $X = n+1$ si personne n'est engagé. Déterminer la loi de X puis son espérance (On admettra que pour $x \neq 1$, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}$). Quelle est la valeur minimal de p pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter l'un des candidats ? (TD 08, Exercice 3)
5. Donner l'image associée, la loi, l'espérance et la variance d'une loi certaine, d'une loi uniforme (sur $[\![1,n]\!]$ et sur $[\![a,b]\!]$), d'une loi de Bernoulli, d'une loi binomiale, d'une loi géométrique et d'une loi de Poisson. (Chapitre 8, morceaux de la section 3)
6. Énoncer et preuve de la formule de Koenig Huygens puis énoncer et preuve de la formule de l'espérance et de la variance d'une loi géométrique. (Propriété 8.2.14 et théorème 8.3.22)