▷ **Exercice 4 :** Dans chaque situation reconnaître la loi usuelle ou exprimer la variable aléatoire en fonction de loi usuelle puis déterminer l'univers associée, l'espérance et la variance :

4. Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules rouges. On pioche 5 boules avec remise dans cette urne. On gagne 2 points pour chaque boule blanche tirée et l'on perd 3 pour chaque boule rouge.
   (a) On note X le nombre de boule blanche tirés ;
   (b) On note Y le gain final.
5. On lance un dé équilibré à 8 faces et l'on s'arrête dès qu'on obtient 7 ou 8. On note N le nombre de lancer nécessaire.
6. Soit $p \in]0,1[$ et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_X(n) = 1-(1-p)^n$.

4. Comme le tirage est avec remise, X represente le nombre de tirage d'une boule blanche toujours dans les mêmes conditions et de manière indépendantes à chaque tirage 5 fois. On a donc que X suit une loi binomial de paramètre 5 et $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. On a donc $X(\Omega) = [\![0,5]\!]$ et pour tout $k \in X(\Omega)$,
$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{5}{k}\frac{1}{5^k}\frac{4^{5-k}}{5^{5-k}} = \binom{5}{k}\frac{4^{5-k}}{5^5}.$$
On a donc $\mathbb{E}(X) = 5\frac{1}{5} = 1$ et $\mathbb{V}(X) = 5\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}$.
Y représente le gain total, on a donc $Y = 2X - 3(5-X) = 5X - 15$ car sur les cinq tirages on gagne deux points pour chacune des X boules blanches et on en perd 3 pour chacun des $5-X$ boules blanches tirés.
On a ainsi $Y(\Omega) = \{-15,-10,-5,0,5,10\}$ et la loi est donnée par :

k	-15	-10	-5	0	5	10
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{4^5}{5^5}$	$5\frac{4^4}{5^5}$	$10\frac{4^3}{5^5}$	$10\frac{4^2}{5^5}$	$5\frac{4}{5^5}$	$\frac{1}{5^5}$

Par linéarité de l'espérance et propriété sur la variance, on a $\mathbb{E}(Y) = 5\mathbb{E}(X) - 15 = 5 - 15 = -10$ et $\mathbb{V}(Y) = 5^2\mathbb{V}(Y) = 25\frac{4}{5} = 20$.
5. On reconnait une loi géométrique de paramètre de paramètre $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. On a donc $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(N) = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ et $\mathbb{V}(N) = \frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4^2}} = 16\frac{3}{4} = 12$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, on a $\mathbb{P}(X=n) = F_X(n) - F_X(n-1) = 1-(1-p)^n - (1-(1-p)^{n-1}) = (1-p)^{n-1} - (1-p)^n = (1-p)^{n-1}(1-(1-p)) = (1-p)^{n-1}p$. De plus $\mathbb{P}(X=1) = F_X(1) = 1-(1-p)^1 = 1-1+p = p = (1-p)^{1-1}p$ ce qui permet de prolonger la formule précédente. On reconnait donc une loi géométrique de paramètre p et on a $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

▷ **Exercice 5 :** Un individu lance une pièce 10 fois. Il prétend que c'est avec une pièce normale qu'il a le plus de chances d'avoir autant de piles que de faces.

1. On suppose que p est la probabilité d'obtenir pile avec la pièce. Calculer la probabilité d'avoir autant de pile que de face.
2. Donner le code python qui permet de tracer cette probabilité en fonction de p sur $[0,1]$.
3. En posant une fonction bien choisit et en l'étudiant, l'assertion de l'individu est-elle juste ?

1. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de pile obtenue sur les dix lancers. X suit une loi binomiale de paramètre 10 et p.
   Avoir autant de pile que de face revient à avoir exactement 5 piles et 5 faces donc la probabilité recherchée est

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=5) &= \binom{10}{5}p^5(1-p)^5 = \frac{6\times 7\times 8\times 9\times 10}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}p^5(1-p)^5 \\ &= \frac{2\times \cancel{3}\times 7\times \cancel{4}\times 2\times 9\times \cancel{10}}{\cancel{2}\times \cancel{3}\times \cancel{4}\times \cancel{5}}(p(1-p))^5 \\ &= (2\times 7\times 2\times 9)(p(1-p))^5 \\ &= 252(p(1-p))^5\end{aligned}$$

2.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X = np.linspace(0,1,1000)
Y = [252*(p*(1-p))**5 for x in X]
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

3. On pose $\begin{array}{rccc} f & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 252(x-x^2)^5 \end{array}$ et on observe que $\mathbb{P}(X=5) = f(p)$. Pour déterminer la valeur de p pour que la probabilité soit maximal il nous faut donc déterminer le maximum de la fonction f.
   f est un polynôme donc il est dérivable et l'on a pour tout $x \in [0,1]$, $f'(x) = 252.5(1-2x)(x-x^2)^4 = 1260(1-2x)((x-x^2)^2)^2$. Le signe de $f'(x)$ est donc le même que celui de $1-2x$. On en déduit donc le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$1-2x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{252}{1024} = \frac{63}{256}$	$\searrow$	0

Le maximum est donc bien atteint en $\frac{1}{2}$, l'étudiant à donc raison.

▷ **Exercice 6 :** Une urne contient des boules blanches en proportion $p \in]0,1[$ et des boules noires en proportion $q = 1-p$. On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule avec remise et l'expérience s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et une boule noire.
On considère les VARs X "nombre de tirage effectuées" et Y 'nombre de boules blanches obtenues".

1. Donner $X(\Omega)$, puis montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\mathbb{P}(X=k) = p^{k-1}q + pq^{k-1}$.
2. Montrer que X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.
3. Donner $Y(\Omega)$. Calculer pour tout $k \geq 2$, $\mathbb{P}(Y=k)$. En déduire la loi de Y.

1. Pour obtenir une boule blanche et une boule noir on doit réaliser au minimum deux tirages. Comme il est théoriquement possible de tirer une infinité de boules blanches avant de tirer une boule noire, on en déduit que $X(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.
L'évènement $X=k$ correspond à ce que l'on réalise exactement k tirages avant de voir apparaitre la deuxième couleur, autrement dit on tire $k-1$ boules blanches sur les premiers tirages puis une boule noire pour le k-ème tirage ou on tire $k-1$ boules noires sur les premiers tirages puis une boule blanche pour le k-ème tirage.
Les deux possibilités étant incompatible, la probabilité recherché est la somme de la probabilité des deux cas et comme les tirages sont indépendant on a d'un coté $p^{k-1}q$ et $q^{k-1}p$. On a ainsi
$$\mathbb{P}(X=k) = p^{k-1}q + q^{k-1}p.$$
2. X admet une espérance si la série numérique $\sum\limits_{k\geq 2} k\mathbb{P}(X=k)$ est absolument convergente, et dans ce cas comme k et $\mathbb{P}(X=k)$ sont positifs, cela revient à la convergence simple de la série.
On observe que $k\mathbb{P}(X=k) = q(kp^{k-1}) + p(kq^{k-1})$ donc il s'agit d'une combinaison linéaire de termes généraux de séries numériques convergente de séries géométriques dérivées premières de raison dans $]0,1[$ donc convergente. On a donc bien que X admet une espérance et l'on a, en utilisant plusieurs fois que $p+q=1$,
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= p\sum_{k=2}^{\infty} kq^{k-1} + q\sum_{k=2}^{\infty} kp^{k-1} \\
&= p\left(\frac{1}{(1-q)^2} - 1\right) + q\left(\frac{1}{(1-p)^2} - 1\right) \\
&= \frac{p}{p^2} - p + \frac{q}{q^2} - q \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - (p+q) \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1
\end{aligned}$$
3. On aura toujours au minimum une boule blanche dans nos tirages et l'on peut en tirer une infinité si l'on ne tire jamais la boule noire donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Soit k un entier tel que $k \geq 2$. $Y = k$ correspond à ce que l'on tire exactement k boules blanches et comme $k \geq 2$, cela signifie que l'on a tiré exactement k boules blanches dans les k premiers tirages et que la boule tirée suivante est noire. On a donc $\mathbb{P}(Y = k) = p^k q$.
Pour déduire la loi de Y il ne nous manque que $\mathbb{P}(Y = 1)$. Déterminons cette valeur en utilisant le fait que la somme de toutes les probabilités est une séries convergente de somme 1. On a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k) = 1 &\Leftrightarrow \mathbb{P}(Y = 1) + \sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k) = 1 \\
&\Leftrightarrow \mathbb{P}(Y = 1) + \sum_{k=2}^{\infty} p^k q = 1 \\
&\Leftrightarrow \mathbb{P}(Y = 1) + p^2 q \sum_{k=2}^{\infty} p^{k-2} = 1 \\
&\Leftrightarrow \mathbb{P}(Y = 1) + p^2 q \sum_{k=0}^{\infty} p^k = 1 \\
&\Leftrightarrow \mathbb{P}(Y = 1) + p^2 q \frac{1}{1-p} = 1 \\
&\Leftrightarrow \mathbb{P}(Y = 1) + \frac{p^2 q}{q} = 1 \\
&\Leftrightarrow \mathbb{P}(Y = 1) = 1 - p^2
\end{aligned}$$