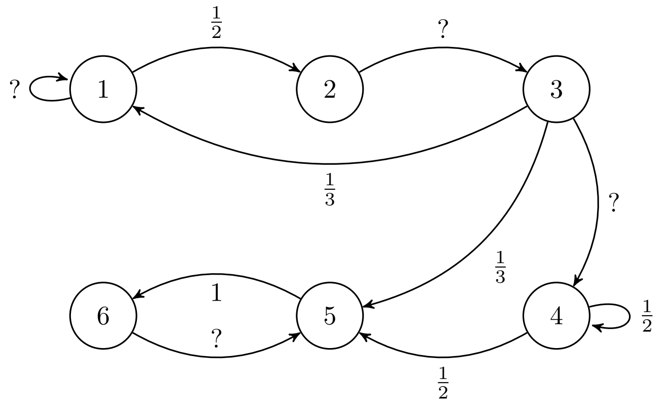
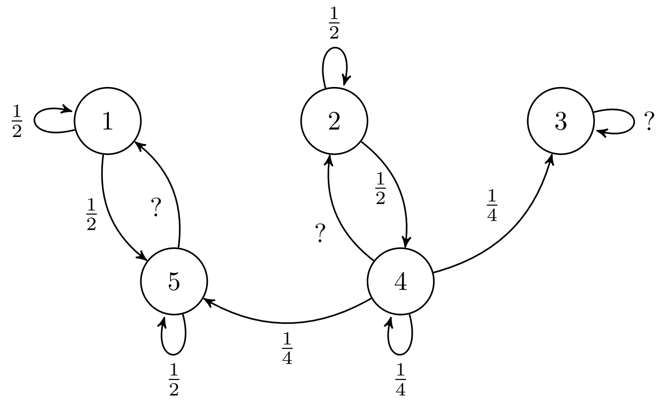
TD 15 - Chaîne de Markov

▷ **Exercice 1 :** Recopier et compléter chacun des deux graphes pour en faire des graphes probabilistes puis donner leur matrice de transition.

1.



2.



▷ **Exercice 2 :** Recopier et compléter chaque matrice pour en faire une matrice stochastique puis donner le graphe probabiliste associé.

1. $M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & ? \\ \frac{1}{6} & 0 & ? \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & ? \end{pmatrix}$.

2. $M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & ? & \frac{3}{8} \\ ? & \frac{2}{5} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & ? & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & ? \end{pmatrix}$.

▷ **Exercice 3 :** On lance une pièce équilibrée une infinité de fois. Les résultats des lancers sont des variables aléatoires indépendantes $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{0,1\}$ (1 pour Pile et 0 pour Face). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$X_n = Y_n + Y_{n-1}.$$

1. Calculer $P_{[X_1=0,X_2=1]}(X_3 = 0)$ et $P_{[X_2=1]}(X_3 = 0)$.
2. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une chaîne de Markov ?

▷ **Exercice 4 :** On dispose de deux pièces, une non pipée, et une qui est truquée et est Face des deux côtés. On commence par en choisir une des deux au hasard (de manière uniforme) et ensuite on lance celle-là une infinité de fois.

1. On observe Face au n-ième lancer. Quelle est la probabilité qu'on obtienne Face au $(n+1)$-ième lancer ?
2. On observe Pile au n-ième lancer. Quelle est la probabilité qu'on obtienne Face au $(n+1)$-ième lancer ?
3. On observe Pile au $(n-1)$-ième lancer et Face au n-ième lancer. Quelle est la probabilité qu'on obtienne Face au $(n+1)$-ième lancer ?
4. La suite des résultats des lancers obtenus forme-t-elle une chaîne de Markov ?

▷ **Exercice 5 :** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\{1,2,3\}$ dont la matrice de transition est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le graphe de cette chaîne de Markov.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1)$, $P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 3)$.
3. Dans cette question, on suppose que X_0 suit la loi uniforme sur $\{1,2,3\}$.
   (a) Calculer $P(X_0 = 2, X_1 = 3, X_2 = 1)$.
   (b) Déterminer la loi de X_2.

▷ **Exercice 6 :** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\{1,2,3\}$ dont la matrice de transition est la suivante :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & ? \\ \frac{1}{3} & ? & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & ? \end{pmatrix}.$$

1. Compléter la matrice P puis dessiner le graphe associé.
2. Peut-on aller de l'état 1 à l'état 2 en une étape ? en deux étapes ?
3. On suppose que X_0 suit la loi certaine de paramètre 1. Calculer $P(X_2 = 1, X_3 = 1)$ et $P(X_2 = 1, X_3 = 2)$.
4. Déterminer les états stables de la chaîne.

▷ **Exercice 7 :** Marguerite la vache s'ennuie un peu dans son pré. Pour passer le temps, elle regarde passer les véhicules sur la route : elle remarque que trois camions sur quatre sont suivis par une voiture alors qu'une voiture sur cinq est suivie par un camion.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose X_n la variable aléatoire valant 1 si le n-ième véhicule observé par Marguerite est un camion et 2 sinon.
On note p la proportion de voiture et q la proportion de camion sur la route. On pourra supposer que la première voiture vu par Marguerite dépend de ces proportions.

1. Expliquer pourquoi $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition M et dessiner le graphe associé.
2. (a) Déterminer l'unique état stable de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) Diagonaliser M et en déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'expression de M^n.
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 1)$ et ; $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 2)$.
   (d) Quelle est la proportion de camion sur cette route ?

▷ **Exercice 8 :** Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante :

- Le mobile se trouve sur le point A à l'instant 0.
- Si à l'instant n, il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $(n+1)$, soit il reste, avec une probabilité de $\frac{2}{3}$, soit il se place sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité.

On note $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne de Markov où pour tout n X_n correspond à la variable aléatoire notant le numéro du sommets sur lequel est le mobile à l'instant n (A correspond au sommet 1, B à 2 et C à 3).

1. Tracer le graphe probabiliste et la matrice de transition M associée à cette chaîne de Markov.
2. Déterminer le ou les états stables de M.
3. Déterminer les éléments propres de M.
4. Déterminer une matrice P inversible dont la première ligne est composée uniquement de 1 et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$.
5. Calculer P^{-1}. En déduire M^n. (On pourra admettre une récurrence usuelle.)
6. Déterminer la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$ pour tout $k \in [\![1, 3]\!]$.