Programme

- Système différentielles linéaires. Cas de la matrice diagonalisable (une autonomie dans la méthodologie de résolution est attendu dans ce cas). Application aux équations différentielles linéaires à coefficients constant d'ordre n. Notion de trajectoire, lien avec le signe des valeurs propres.
- Suite de variable aléatoires. Définitions, indépendances mutuelles de variables aléatoires. Cas de la somme et applications aux lois binomiales et de Poisson. Espérance et variance.
- Chaînes de Markov. Rappel sur les graphe de première année. Définition (Chaînes de Markov homogènes), matrice de transition, matrice stochastique. Détermination de loi de variable aléatoires finis, état stable.

Questions de cours

1. On considère : $\begin{cases} x' &= x+y \\ y' &= -2x-2y \end{cases}$. Montrer que toutes les trajectoires en $+\infty$ convergent puis déterminer les états d'équilibres. Résoudre le système puis déterminer les trajectoires convergente vers $(2,-2)$ en $+\infty$ puis celles convergeant en $+\infty$ et $-\infty$. (TD 13, Exercice 6)
2. Soit n un entier valant au moins 2. Une urne continent n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise dans l'urne. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire correspondant au nombre d'obtentions du numéro i sur les k premiers tirages.
   Déterminer pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ la loi de X_i, puis si les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont-elles mutuellement indépendantes ? Calculer pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ $Cov(X_i, X_j)$ (lorsque $i \neq j$). (TD 14, Exercice 1)
3. Énoncer des résultats concernant la somme de loi binomiales et la somme de loi de Poisson. Démonstration d'une deux preuves au choix de l'examinateur. (Propriétés 14.2.3 et 14.2.6 et TD 14, Exercice 2)
4. Définitions d'un graphe probabiliste, de matrice de transition et d'une matrice stochastique. Énoncé du résultat liant les deux. On donnera également un exemple de graphe probabiliste d'ordre 3 et sa matrice de transition associée puis on vérifiera qu'il s'agit bien d'une matrice stochastique. (Définitions 15.1.6, 15.1.8, 15.1.11 et théorème 15.1.14, l'exemple est libre)
5. On lance une pièce équilibrée une infinité de fois. Les résultats des lancers sont des variables aléatoires indépendantes $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{0,1\}$ (1 pour Pile et 0 pour Face). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n := Y_n + Y_{n-1}$.
   Calculer $\mathbb{P}_{[X_1=0,X_2=1]}(X_3=0)$ et $\mathbb{P}_{[X_2=1]}(X_3=0)$. Que peut-on en déduire ? (TD 14, Exercice 1)
6. Marguerite la vache s'ennuie un peu dans son pré. Pour passer le temps, elle regarde passer les véhicules sur la route : elle remarque que trois camions sur quatre sont suivis par une voiture alors qu'une voiture sur cinq est suivie par un camion.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose X_n la variable aléatoire valant 1 si le n-ième véhicule observé par Marguerite est un camion et 2 sinon.
On note p la proportion de voiture et q la proportion de camion sur la route. On pourra supposer que la première voiture vu par Marguerite dépend de ces proportions.
Expliquer pourquoi $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition M et dessiner le graphe associé. Déterminer l'unique état stable de la chaîne de Markov et la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Quelle est la proportion de camion sur cette route ?