TD 16 - Variables aléatoires à densités

▷ **Exercice 1 :** Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Montrer que X est une variable à densité et déterminer une densité de X.

▷ **Exercice 2 :** On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^{\frac{4}{3}} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité X.
2. Déterminer une densité de X.
3. Calculer $\mathbb{P}(0.973 < X \leq 1.2)$. (On exprimera le résultat sous la forme c^α.)

▷ **Exercice 3 :** Soit $c \in \mathbb{R}$. on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ce^{-|x|}.$$

1. Déterminer les valeurs de c pour lesquelles f est une densité d'une variable aléatoire X.
2. Pour le ou les valeurs déterminés précédemment, déterminer la fonction de répartition de X. Cette loi est une la loi de Laplace.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. Montrer que X admet une variance et la calculer.

▷ **Exercice 4 :** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Par la suite, on note X une variable aléatoire de densité f.
   (a) Montrer que X possède des moments de tous ordres et pour tout entier $r \in \mathbb{N}^*$, calculer $m_r(X)$.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de X.
3. Déterminer la fonction de répartition de X.
4. (a) Déterminer la loi de $Y = \ln(X)$.
   (b) À l'aide de la loi de Y, déterminer si Y possède une espérance, une variance. Les calculer (sous réserve d'existence).

▷ **Exercice 5 :**

1. Prouver la propriété 16.3.2

2. Prouver la propriété 16.3.3

▷ **Exercice 6 :** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a < b$. On pose $Y = (b-a)X + a$

1. Exprimer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(Y \leq x)$ sous la forme d'un évènement $X \leq c(x)$.
2. En déduire la fonction de répartition de Y et en déduire la loi de Y.
3. Écrire une fonction Python prenant en arguments a et b et renvoyant une simulation d'une loi uniforme sur $[a,b]$.

▷ **Exercice 7 :**

1. Prouver la propriété 16.3.8
2. Prouver la propriété 16.3.9

▷ **Exercice 8 :** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et posons $Y = \max(1, X)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y.
2. La variable Y est-elle à densité ?

▷ **Exercice 9 :** Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Dans chaque cas, déterminer la fonction de répartition de Y, vérifier si Y est à densité ou non et déterminer une densité le cas échéant.

1. $Y = \sqrt{X}$.
2. $Y = X^3$.
3. $Y(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{X(\omega)} & \text{si } X(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

▷ **Exercice 10 :**

1. Écrire une fonction Densite(mu,sigma) permettant d'afficher la courbe d'une densité d'une loi normale $X \hookrightarrow \mathcal{N}(mu, sigma^2)$ sur $[-10, 10]$.
2. A l'aide de plusieurs simulation graphique, conjecturer la valeur de $\mathbb{P}(X \leq \mu)$ pour $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
3. Prouver votre conjecture.

▷ **Exercice 11 :** Déterminer la loi de Y dans chaque cas.

1. $Y = X^2$ où $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,1])$
2. $Y = e^X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$
3. $Y = |X|$ où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

▷ **Exercice 12 :** Pour tout nombre réel x, on rappelle que $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
Soit X la variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).
On pose $Y = \lfloor X \rfloor$. La variable Y est donc la partie entière de X et on a :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad [Y = k] = [k \leqslant X < k+1].$$

1. (a) Montrer que Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (b) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, calculer $P(Y = k - 1)$.
   (c) En déduire que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
   (d) Donner l'espérance et la variance de $Y + 1$. En déduire l'espérance et la variance de Y.
2. On pose $Z = X - Y$.
   (a) Déterminer les valeurs prises par Z.
   (b) En utilisant le système complet d'évènements $([Y = k])_{k\in\mathbb{N}}$, montrer que :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \mathbb{P}(Z \leqslant x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

   (c) En déduire une densité f de Z.
   (d) Déterminer l'espérance $E(Z)$ de Z.

▷ **Exercice 13 :** [Ecricome 2015] Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

1. (a) Montrer que g est dérivable sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?
   (b) Donner le tableau de variations de g sur $[0, +\infty[$ (on précisera la limite de g en $+\infty$).
   (c) Étudier la convexité de g sur $]0, +\infty[$.
   (d) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
   On précisera avec soin cette allure au voisinage du point d'abscisse 0 de la courbe. On rappelle que $e^{-1} \approx 0,37$.
2. (a) Montrer que la fonction g est une densité de probabilité. On note Y une variable aléatoire dont une densité est la fonction g, et dont la fonction de répartition est notée G.
   (b) Sans calcul, justifier que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que pour tout réel x,

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x}(1 + x) & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

   (d) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance, que l'on calculera.
3. On considère la variable aléatoire $Z = e^Y$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition notée H de la variable aléatoire Z.
   (b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z.
   (c) La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?