TD 17 - Compléments sur les variables aléatoires réelles

▷ **Exercice 1 :** [EML 2010] Dans cette partie, X est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0,1[$ et Y est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda \in]0,+\infty[$.
On note $q = 1 - p$.
On suppose que X et Y sont indépendantes, c'est à dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,+\infty[, \mathbb{P}((X=k)\cap(Y\leq t)) = \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y\leq t).$$

1. Rappeler une densité de Y ainsi que son espérance et sa variance.
2. On définit la variable aléatoire Z par $Z = \frac{Y}{X}$.
   (a) Montrer : $\forall t \in [0,+\infty[, \mathbb{P}(Z \geq t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y \geq kt)$.
   (b) En déduire : $\forall t \in [0,+\infty[, \mathbb{P}(Z \geq t) = \frac{pe^{-\lambda t}}{1-qe^{-\lambda t}}$.
   (c) Montrer que la variable aléatoire Z admet une densité et déterminer une densité de Z.

▷ **Exercice 2 :** Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On pose $U = \max(X,Y)$ et $V = \min(X,Y)$

1. Déterminer la fonction de répartition de U.
2. Déterminer la fonction de répartition de V.
3. Déterminer la loi de V pour $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$.
4. Prolonger le résultat précédent pour n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi exponentielle.

▷ **Exercice 3 :** [EDHEC 2007] On admet que si Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires à densité, définies sur le même espace probabilisé, alors leur covariance, si elle existe, est définie par :

$$\text{Cov}\,(Z_1,Z_2) = \mathbb{E}\,(Z_1Z_2) - \mathbb{E}\,(Z_1)\,\mathbb{E}\,(Z_2)\,.$$

On admet également que si Z_1 et Z_2 sont indépendantes alors leur covariance est nulle.
On considère deux variables aléatoires réelles X et U définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, indépendantes, X suivant la loi normale $\mathcal{N}\,(0,1)$ et U suivant la loi discrète uniforme sur $\{-1,1\}$.
On pose $Y = UX$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

1. (a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :
   $$\mathrm{P}\,(Y \leq x) = \mathrm{P}\,([U=1]\cap[X\leq x]) + \mathrm{P}\,([U=-1]\cap[X \geq -x])\,.$$
   (b) En déduire que Y suit la même loi que X.
2. (a) Calculer l'espérance de U puis montrer que $\mathbb{E}\,(XY) = 0$.
   (b) En déduire que $\text{Cov}\,(X,Y) = 0$.
3. (a) Rappeler la valeur de $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ et en déduire que $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$.

(b) Montrer, grâce à une intégration par parties que

$$\forall A \in \mathbb{R}_+ : \quad \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3 \int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

(c) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ converge et vaut $\frac{3}{2}\sqrt{2\pi}$.

(d) Établir finalement que X possède un moment d'ordre 4 et que $\mathbb{E}\left(X^4\right) = 3$.

4. (a) Vérifier que $\mathbb{E}\left(X^2 Y^2\right) = 3$.

   (b) Déterminer $\mathrm{Cov}\left(X^2, Y^2\right)$.

   (c) En déduire que X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes. Montrer alors que X et Y ne le sont pas non plus.

▷ **Exercice 4 :** [EML 2020, extraits] Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < b, \\ a\frac{b^a}{x^{a+1}} \text{ si } x \geq b \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Pareto de paramètres a et b lorsqu'elle admet pour densité la fonction f.
Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X suivant la loi de Pareto de paramètres a et b.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

3. (a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1]$. Montrer que la variable aléatoire $bU^{\frac{-1}{a}}$ suit la loi de Pareto de paramètres a et b.

   (b) En déduire une fonction Python prenant en arguments a et b deux réels strictement positifs et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X.

4. (a) Montrer que X admet une espérance si et seulement si $a > 1$ et que, dans ce cas,
$$\mathbb{E}(X) = \frac{ab}{a-1}.$$

   (b) Montrer que X admet une variance si et seulement si $a > 2$ et que, dans ce cas,
$$\mathbb{V}(X) = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}.$$

5. On suppose dans cette question uniquement que $a = 3$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X. On définit $Z_n = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$. On admet que Z_n est une variables aléatoires définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Déterminer l'espérance et la variance de Z_n.