DS 12 - Suites de variables aléatoires et chaînes de Markov

▷ **Exercice 1 :** On lance une pièce équilibrée une infinité de fois. Les résultats des lancers sont des variables aléatoires indépendantes $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{0,1\}$ (1 pour Pile et 0 pour Face). Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$X_n = Y_n + Y_{n-1}.$$

1. Calculer $P_{[X_1=0,X_2=1]}(X_3=0)$ et $P_{[X_2=1]}(X_3=0)$.
2. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une chaîne de Markov ?

1. On observe que

$$(X_1=0)\cap(X_2=1)=(Y_0=0)\cap(Y_1=0)\cap(Y_1+Y_2=1)=(Y_0=0)\cap(Y_1=0)\cap(Y_2=1).$$

Or on a que $(X_3=0)=(Y_2=0)\cap(Y_3=0)$ donc sachant que l'évènement $(X_1=0)\cap(X_2=1)$ se réalise, l'évènement $X_3=0$ est impossible car Y_2 ne peut prendre simultanément les valeurs 0 et 1. On a donc

$$P_{[X_1=0,X_2=1]}(X_3=0)=0.$$

De même, comme $\{(Y_1=0),(Y_1=1)\}$ est un système complet d'évènements où chaque évènement à une probabilité non nulle de se produire, on a par la formule des probabilité totale :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{X_2=1}(X_3=0) &= \mathbb{P}(Y_1=0)\mathbb{P}_{(Y_1=0)\cap(X_2=1)}(X_3=0)\\
&\quad+\mathbb{P}(Y_1=1)\mathbb{P}_{(Y_1=1)\cap(X_2=1)}(X_3=0)\\
&= \mathbb{P}(Y_1=0)\mathbb{P}_{(Y_1=0)\cap(Y_2=1)}(X_3=0)\\
&\quad+\mathbb{P}(Y_1=1)\mathbb{P}_{(Y_1=1)\cap(Y_2=0)}(X_3=0)\ \text{ car } X_2=Y_1+Y_2\\
&= \mathbb{P}(Y_1=0)\mathbb{P}_{(Y_1=0)\cap(Y_2=1)}((Y_2=0)\cap(Y_3=0))\\
&\quad+\mathbb{P}(Y_1=1)\mathbb{P}_{(Y_1=1)\cap(Y_2=0)}((Y_2=0)\cap(Y_3=0))\\
&\qquad\text{car } (X_3=0)=(Y_2=0)\cap(Y_3=0)\\
&= \frac{1}{2}0+\frac{1}{2}\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

car sachant $Y_2=1$, l'évènement $Y_2=0$ est impossible et $\mathbb{P}_{(Y_1=1)\cap(Y_2=0)}((Y_2=0)\cap(Y_3=0))=\mathbb{P}_{(Y_1=1)\cap(Y_2=0)}((Y_3=0))=\mathbb{P}(Y_3=0)=\frac{1}{2}$ par indépendance des lancers.

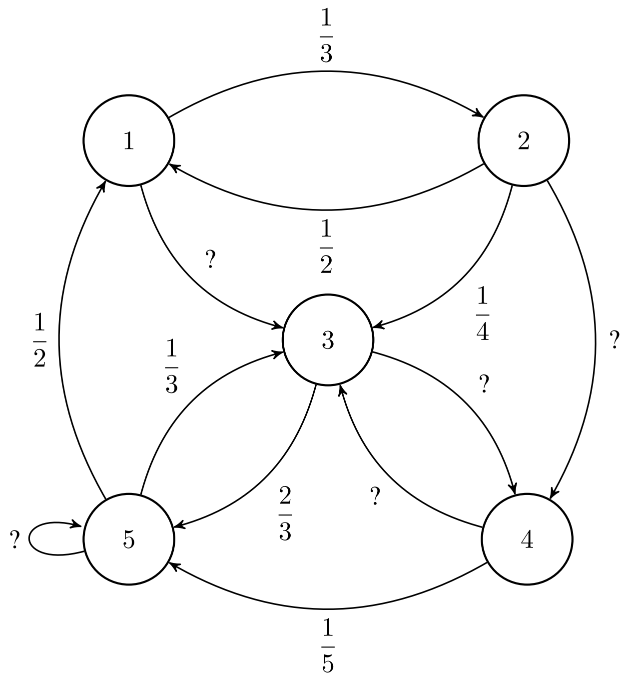
2. On a

$$P_{[X_1=0,X_2=1]}(X_3=0)=0\neq\frac{1}{4}=\mathbb{P}_{X_2=1}(X_3=0)$$

donc $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas une chaîne de Markov.

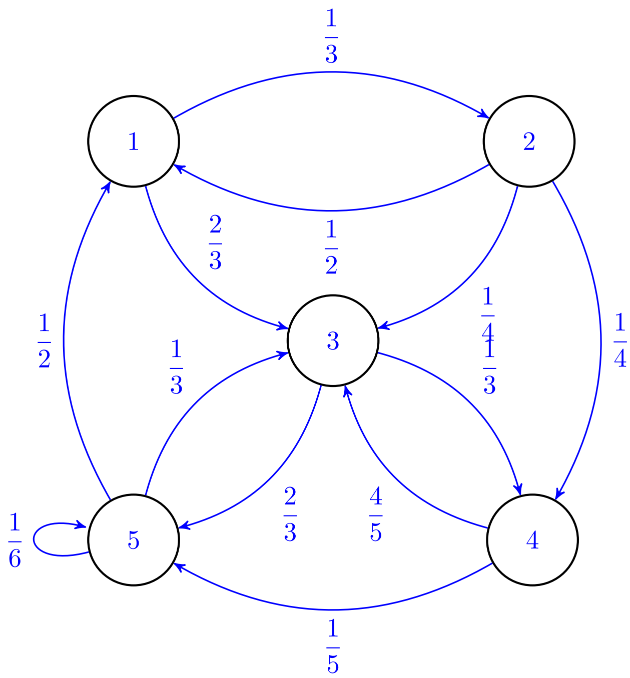
▷ **Exercice 2 :**

1. Recopier et compléter le graphe probabiliste suivant :



2. Donner la matrice de transition de ce graphe.
3. On suppose qu'il s'agit du graphe probabiliste associé à une chaînes de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où l'on suppose que X_0 suit une loi certaine de paramètre 2. Calculer

$$\mathbb{P}(X_0 = 2, X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 5, X_4 = 5).$$



1.

2. La matrice de transition de ce graphe est

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

3. On a

$$\mathbb{P}(X_0 = 2, X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 5, X_4 = 5) = 1.\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{6} = \frac{1}{27}.$$

▷ **Exercice 3 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(X_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes qui admettent toutes une espérance. Montrer, par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\prod_{k=1}^{n} X_k$ admet une espérance et l'on a

$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k).$$

- Initialisation : Soit X_1 une variable aléatoire admettant une espérance, on a $\prod_{k=1}^{1} X_k = X_1$ donc on a trivialement que ce produit admet une espérance et que $\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{1} X_k\right) = \mathbb{E}(X_1)$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour n variables aléatoires mutuellement indépendantes admettant une espérance on a que leurs produit admet une espérance qui vaut le produit des espérances. Considérons à présent $(X_1, ..., X_n, X_{n+1})$ variables aléatoires mutuellement indépendantes admettant chacune une espérance et montrons que le produit des $n+1$ variables aléatoires admet une espérance et que
$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n+1} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}(X_k).$$
Comme $(X_1, ..., X_n, X_{n+1})$ sont mutuellement indépendantes, on a que $(X_1, ..., X_n)$ sont mutuellement indépendantes donc par l'hypothèse de récurrence, $Y = \prod_{k=1}^{n} X_k$ admet une espérance et l'on a $\mathbb{E}(Y) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$.
Par le lemme des coalitions Y et X_{n+1} sont indépendants donc YX_{n+1} admet

une espérance et l'on a $\mathbb{E}(YX_{n+1}) = \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X_{n+1})$ soit $\prod_{k=1}^{n+1} X_k$ admet une espérance et l'on a

$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n+1} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}(X_k).$$

- Conclusion : La propriété est initialisé au rang 1 et est héréditaire à partir de ce rang donc par le principe de récurrence, on a montré que pour tout n, pour n variables aléatoires mutuellement indépendantes admettant une espérance on a que leurs produit admet une espérance qui vaut le produit des espérances.

▷ **Exercice 4 :** Soit $p \in]0,1[$ et soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = p \text{ et } \mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$. On note $p_n = \mathbb{P}(Y_n = 1)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer de deux manières différentes l'espérance de Y_n pour en déduire une expression de p_n en fonction de p. (On pourra utiliser l'exercice précédent.)
2. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter le résultat.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on observe que $Y_n(\Omega) = \{-1, 1\}$ car il s'agit d'un produit de 1 et de -1. $Y_n(\Omega)$ est donc fini donc admet une espérance et l'on a

$$\mathbb{E}(Y_n) = -1.\mathbb{P}(Y_n = -1) + 1.\mathbb{P}(Y_n = 1) = -1(1 - p_n) + 1p_n = 2p_n - 1.$$

De plus par l'exercice précédent, comme la suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est mutuellement indépendantes et que pour tout k $X_k(\Omega)$ est fini donc X_k admet une espérance et par l'exercice précédent Y_n également pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_n) &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = \prod_{k=1}^{n}(-1\mathbb{P}(X_k = -1) + 1\mathbb{P}(X_k = 1)) \\ &= \prod_{k=1}^{n}(-1(1-p) + 1p) = \prod_{k=1}^{n}(2p-1) \\ &= (2p-1)^n\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$2p_n - 1 = (2p-1)^n \Leftrightarrow p_n = \frac{(2p-1)^n + 1}{2}.$$

2. Comme $p \in]0,1[$, on a $2p - 1 \in]-1,1[$ donc $\lim_{n\to+\infty}(2p-1)^n = 0$, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

On peut interpréter cela comme le fait que plus le nombre de multiplications est élevé, même si on a plus de chance de multiplié par 1 ou pas -1 tant que les deux sont possibles, on tendra vers une situation d'équiprobabilité.