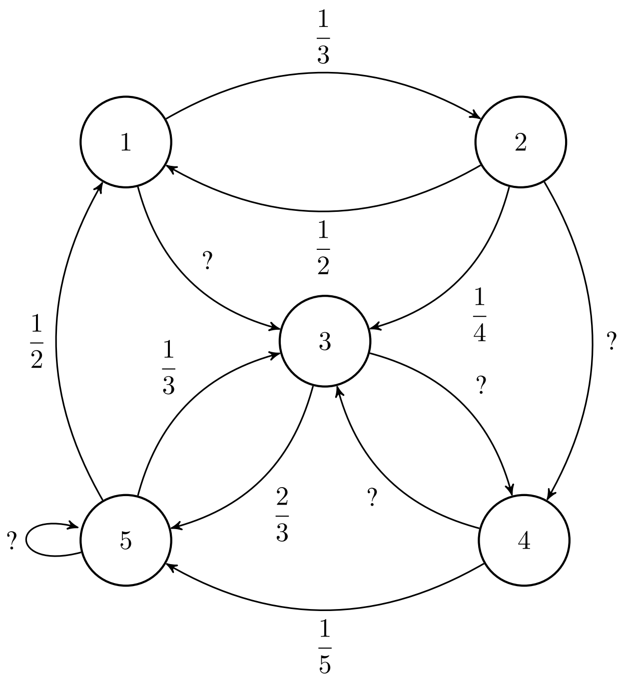
▷ **Exercice 1 :** On lance une pièce équilibrée une infinité de fois. Les résultats des lancers sont des variables aléatoires indépendantes $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{0,1\}$ (1 pour Pile et 0 pour Face). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$X_n = Y_n + Y_{n-1}.$$

1. Calculer $P_{[X_1=0,X_2=1]}(X_3 = 0)$ et $P_{[X_2=1]}(X_3 = 0)$.
2. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une chaîne de Markov ?

▷ **Exercice 2 :**

1. Recopier et compléter le graphe probabiliste suivant :



2. Donner la matrice de transition de ce graphe.
3. On suppose qu'il s'agit du graphe probabiliste associé à une chaînes de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où l'on suppose que X_0 suit une loi certaine de paramètre 2. Calculer

$$\mathbb{P}(X_0 = 2, X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 5, X_4 = 5).$$

▷ **Exercice 3 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(X_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes qui admettent toutes une espérance. Montrer, par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k$ admet une espérance et l'on a

$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k).$$

▷ **Exercice 4 :** Soit $p \in]0,1[$ et soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = p \text{ et } \mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $Y_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k$. On note $p_n = \mathbb{P}(Y_n = 1)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer de deux manières différentes l'espérance de Y_n pour en déduire une expression de p_n en fonction de p. (On pourra utiliser l'exercice précédent.)
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter le résultat.