Programme

- Chaînes de Markov. Rappel sur les graphe de première année. Définition (Chaînes de Markov homogènes), matrice de transition, matrice stochastique. Détermination de loi de variable aléatoires finis, état stable.
- Variables aléatoires à densités. Définitions, fonctions de répartitions et densités. Caractérisations de ces fonctions. Espérance et variances. Théorème de transfert.
- Lois à densité usuelles. Loi uniforme, loi exponentielle et loi normale. (Pas encore de transfert de loi complexe on était fait.

La notion d'indépendance sera vu la semaine prochaine.

Questions de cours

1. Définitions d'un graphe probabiliste, de matrice de transition et d'une matrice stochastique. Énoncé du résultat liant les deux. On donnera également un exemple de graphe probabiliste d'ordre 3 et sa matrice de transition associée puis on vérifiera qu'il s'agit bien d'une matrice stochastique. (Définitions 15.1.6, 15.1.8, 15.1.11 et théorème 15.1.14, l'exemple est libre)
2. On lance une pièce équilibrée une infinité de fois. Les résultats des lancers sont des variables aléatoires indépendantes $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{0,1\}$ (1 pour Pile et 0 pour Face). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n := Y_n + Y_{n-1}$.
   Calculer $\mathbb{P}_{[X_1=0,X_2=1]}(X_3 = 0)$ et $\mathbb{P}_{[X_2=1]}(X_3 = 0)$. Que peut-on en déduire ? (TD 14, Exercice 1)
3. Marguerite la vache s'ennuie dans son pré. Elle regarde passer les véhicules sur la route : elle remarque que trois camions sur quatre sont suivis par une voiture alors qu'une voiture sur cinq est suivie par un camion.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose X_n la variable aléatoire valant 1 si le n-ième véhicule observé par Marguerite est un camion et 2 sinon.
   On note p la proportion de voiture et q la proportion de camion sur la route. On pourra supposer que la première voiture vu par Marguerite dépend de ces proportions.
   Expliquer pourquoi $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition M et dessiner le graphe associé. Déterminer l'unique état stable de la chaîne de Markov et la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Quelle est la proportion de camion sur cette route ? (TD 14, Exercice 7)
4. Définitions d'une variable aléatoire à densité et d'une densité. Énoncer des caractérisations des fonctions de répartitions et des densités. (Définitions 16.1.1 et 16.1.3 et propriétés 16.1.9 et 16.1.12)
5. Soit $f : x \mapsto ce^{-|x|}$. Déterminer c pour que f soit la densité d'une variable aléatoire à densité X. Déterminer F_X puis (en justifiants l'existence) $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$. (TD 15, Exercice 3)
6. Énoncer de la fonction de répartition et de densité d'une loi exponentielle ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance. Démonstrations des propriétés (Définition 16.3.7, propriétés 16.3.8 et 16.3.9 et TD 15, Exercice 7)