DS 13 - Variables aléatoires à densités.

▷ **Exercice 1 :** Soit $c \in \mathbb{R}$. on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ce^{-|x|}.$$

1. Déterminer les valeurs de c pour lesquelles f est une densité d'une variable aléatoire X.
2. Pour le ou les valeurs déterminés précédemment, déterminer la fonction de répartition de X. Cette loi est une la loi de Laplace.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

▷ **Exercice 2 :** Soit $c \in \mathbb{R}$. On pose

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 \ \text{ si } x < 1 \\ 1 - c\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \ \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$

1. Déterminer la valeur de c pour laquelle F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X.
2. Calculer $\mathbb{P}(0 < X \leq 2)$.
3. Donner une densité de X.

▷ **Exercice 3 :** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a < b$. On pose $Y = (b-a)X + a$

1. Exprimer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(Y \leq x)$ sous la forme d'un évènement $X \leq c(x)$ où $c(x)$ est un réel dépendant de x.
2. En déduire la fonction de répartition de Y et en déduire la loi de Y.
3. Écrire une fonction Python prenant en arguments a et b et renvoyant une simulation d'une loi uniforme sur $[a,b]$.

▷ **Exercice 4 :** Compléter le tableau au verso où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ où $a < b$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$:

Loi	Une densité	Fonction de répartition	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{V}(X)$
$X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$				
$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$				
$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$				
$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$				