DS 13 - Variables aléatoires à densités.

▷ **Exercice 1 :** Soit $c \in \mathbb{R}$. on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ce^{-|x|}.$$

1. Déterminer les valeurs de c pour lesquelles f est une densité d'une variable aléatoire X.
2. Pour le ou les valeurs déterminés précédemment, déterminer la fonction de répartition de X. Cette loi est une la loi de Laplace.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

On observe dans un premier temps que f est une fonction paire.

1. Pour que f soit une densité, on a besoin de que f soit continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de point, que f soit à valeur positive et que l'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ soit convergente et vaut 1. On a
   - f est continue est $\mathbb{R}$ en tant que composée de la fonction valeur absolue qui est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$ et de l'exponentielle qui est continue sur $\mathbb{R}$.
   - f est positive si et seulement si c est positif car une exponentielle est positive.
   - Étudions l'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. On a

     $$\begin{aligned}\int_0^A f(t)\,dt &= \int_0^A ce^{-t}\,dt = [-ce^{-t}] \\ &= -ce^{-A} - (-ce^{-0}) = c(1-e^{-A}) \underset{A\to+\infty}{\to} c\end{aligned}$$

     On a donc que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut c.

     De même, on a

     $$\begin{aligned}\int_{-A}^0 f(t)\,dt &= \int_A^0 -f(-t)\,dt \text{ par changement de variable} \\ &= \int_0^A f(-t)\,dt = \int_0^A f(t)\,dt \text{ par parité} \\ &= c(1-e^{-A}) \text{ par le calcul précédent}\end{aligned}$$

     On en déduit donc que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^0 f(t)\,dt = c$ donc l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt$ est convergente et vaut c.

     L'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$ est donc convergente et vaut $2c$.

   f est donc une fonction à densité si et seulement si c est positif et $2c = 1$ autrement dit si et seulement si $c = \dfrac{1}{2}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_-$. On a donc

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{2} - \int_{x}^{0} \frac{1}{2}e^{t}\,dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-e^{x}) = \frac{e^{x}}{2}$$

De même, pour $x \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-e^{-x}) = 1 - \frac{e^{-x}}{2}$$

On a donc

$$\begin{array}{rccl} F_X & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{e^{x}}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \dfrac{e^{-x}}{2} & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$

3. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)\,dt$ est absolument convergente. Soit $A \in \mathbb{R}$ et par classe $\mathcal{C}^1$ des fonctions considérées on a :

$$\begin{aligned} \int_0^A |tf(t)|\,dt &= \int_0^A \frac{t}{2}e^{-t}\,dt = \left[\frac{-t}{2}e^{-t}\right]_0^A + \int_0^A \frac{1}{2}e^{-t}\,dt \\ &= -\frac{A}{2}e^{-A} + \frac{0}{2}e^{-0} + \frac{1-e^{-A}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{A+1}{2}e^{-A} \end{aligned}$$

On a $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A |tf(t)|\,dt = \frac{1}{2}$ donc l'intégrale $\int_0^{\infty} tf(t)\,dt$ est absolument convergente.
De même, on a

$$\begin{aligned} \int_{-A}^0 |tf(t)|\,dt &= \int_A^0 -|-tf(-t)|\,dt = \int_0^A |tf(t)|\,dt \\ &= \frac{1}{2} - \frac{A+1}{2}e^{-A} \end{aligned}$$

On a $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_{-A}^0 |tf(t)|\,dt = \frac{1}{2}$ donc l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^0 tf(t)\,dt$ est absolument convergente donc l'intégrale doublement impropre $\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)\,dt$ est absolument convergente donc X admet une espérance et l'on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^0 tf(t)\,dt + \int_0^{\infty} tf(t)\,dt \\ &= -\int_{-\infty}^0 -tf(t)\,dt + \frac{1}{2} = -\int_{-\infty}^0 |tf(t)|\,dt + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

▷ **Exercice 2 :** Soit $c \in \mathbb{R}$. On pose

$$F : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 - c\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \text{ sinon} \end{cases} \end{array}.$$

1. Déterminer la valeur de c pour laquelle F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X.
2. Calculer $\mathbb{P}(0 < X \leq 2)$.
3. Donner une densité de X.

1. Vérifions les cinq axiomes pour que F soit une fonction de répartition.
   (a) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
   (b) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 - c\ln(1) = 1$
   (c) F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ car la fonction nulle est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et $x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et est à valeurs strictement positives donc par composition avec le logarithme $x \mapsto 1 - c\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$.
   (d) Pour que F soit continue sur $\mathbb{R}$, il ne nous reste qu'à établir la continuité en 1 par le point précédent. On a $\lim_{x \to 1^-} F(x) = \lim_{x \to 1^-} 0 = 0$ et $\lim_{x \to 1^+} F(x) = \lim_{x \to 1^+} 1 - c\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1 - c\ln(2)$. On doit donc avoir $0 = 1 - c\ln(2)$ soit $c = \dfrac{1}{\ln(2)}$. Pour cette valeur de c, F est continue sur $\mathbb{R}$.
   (e) La croissance est immédiate sur $]-\infty, 1[$. Vérifions là sur $]1, +\infty[$. F est dérivable sur ce dernier intervalle par un point précédent et pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a $F'(x) = -c\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \dfrac{c}{x^2 + x}$. Cette dernière quantité est positive sur $]1, +\infty[$ dès que c l'est également or $\ln(2) > 0$.
   On a donc bien que F est croissante sur $]1, +\infty[$ et comme F est continue sur $\mathbb{R}$, F est bien croissante sur $\mathbb{R}$.

   On a donc bien que F est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité si et seulement si $c = \ln(2)$.
2. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(0 < X \leq 2) &= F_X(2) - F_X(0) \\ &= 1 - \frac{1}{\ln(2)} \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) - 0 \\ &= 1 - \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{\ln(2)} = 1 - \frac{\ln(3) - \ln(2)}{\ln(2)} \\ &= 1 - \frac{\ln(3)}{\ln(2)} + 1 = 2 - \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \end{aligned}$$

3. Pour $x \in]-\infty, 1[$, on a $F'(x) = 0$. Pour $x \in]1, +\infty[$, on a $F'(x) = \dfrac{1}{ln(2)x(x+1)}$.
   On a donc que
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \dfrac{1}{\ln(2)x(x+1)} \text{ sinon} \end{cases}$$
   est une densité de X.

▷ **Exercice 3 :** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a < b$. On pose $Y = (b-a)X + a$

1. Exprimer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(Y \leq x)$ sous la forme d'un évènement $X \leq c(x)$ où $c(x)$ est un réel dépendant de x.
2. En déduire la fonction de répartition de Y et en déduire la loi de Y.
3. Écrire une fonction Python prenant en arguments a et b et renvoyant une simulation d'une loi uniforme sur $[a,b]$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$(Y \leq x) = ((b-a)X + a \leq x) = ((b-a)X \leq x - a) = \left(X \leq \frac{x-a}{b-a}\right)$$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par ce qui précède on a
$$F_Y(x) = F_X\left(\frac{x-a}{b-a}\right).$$
   On a
   - Si $x < a$ alors $\dfrac{x-a}{b-a} < 0$ donc $F_Y(x) = 0$;
   - Si $a \leq x \leq b$ alors $\dfrac{x-a}{b-a} \in [0,1]$ donc $F_Y(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$;
   - Si $b < x$ alors $\dfrac{x-a}{b-a} > 1$ donc $F_Y(x) = 1$.

   On a donc
$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ si } x \in [a,b] \\ 1 \text{ si } b < x \end{cases}$$
3.
```
import numpy.random as rd
def Uniforme(a,b) :
        X = rd.random()
        Y = (b-a)*X+a
        return Y
```

▷ **Exercice 4 :** Compléter le tableau au verso où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ où $a < b$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$:

Loi	Une densité	Fonction de répartition	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{V}(X)$
$X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$	$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 \text{ sinon} & \end{cases}$	$x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } \ x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \ \text{ si } x \in [a,b] \\ 1 \ \text{ si } \ b < x \end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$	$x \mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \ \text{ si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$	$x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } \ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} \ \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \, dt$	0	1
$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dt$	μ	σ^2