ANNEE SCOLAIRE 2024/2025 Devoir maison $n°2$ A rendre le 03/03/2025	Lycée Jean Jacques ROUSSEAU Sarcelles

1 Informatique

On se propose ici de refaire le lien entre une loi binomiale de paramètre n et $\frac{\lambda}{n}$ et une loi de Poisson de paramètre λ lorsque n tend vers l'infini d'un point de vue informatique.

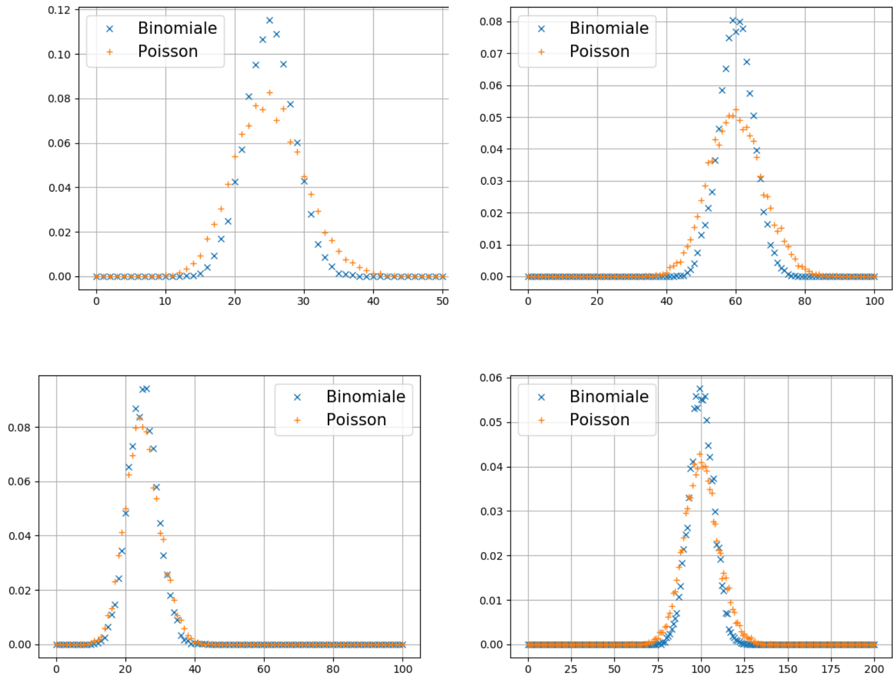
1. Recopier et compléter la fonction RepartitionBinom(n,p) ci-dessous qui trace le graphique créé à partir de 10000 simulations de la loi $\mathcal{B}(n,p)$ et qui représente les fréquences d'apparitions de chaque entier de $[\![0,n]\!]$.

```
...............
...............
def RepartitionBinom(n,p) :
        L = .........
        X = range(n+1)
        Y = []
        for k in range(n+1) :
                .........
        .........
        plt.grid()
        .........
```

2. En s'inspirant du code précédent, écrire la fonction RepartitionPoisson(n,L) qui trace le graphique créé à partir de 10000 simulations de la loi $\mathcal{P}(L)$ et qui représente les fréquences d'apparitions de chaque entier de $[\![0,n]\!]$.
3. Recopier et compléter la fonction ComparaisonRepartition(n,L) qui permet de tracer sur le même graphique les deux graphiques précédents pour une loi binomiale de paramètres n et $\frac{L}{n}$ et une loi de Poisson de paramètre L.

```
def ComparaisonRepartition(n,L) :
        LBinom = .........
        LPoisson = .........
        X = range(n+1)
        YBinom = .........
        YPoisson = .........
        for k in range(n+1) :
                .........
                .........
        .........
        .........
        plt.grid()
        .........
```

On observe les graphiques suivant après plusieurs exécutions du code :



(Les graphiques sont pour (n, L) valant (50,25), (100,25),(100,60) et (200,100).)

4. Que peut-on conjecturer à partir de nos graphiques ?
5. On se propose à présent de prouver notre conjecture. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit n un entier tel que $\frac{\lambda}{n} \in]0,1[$ et soit $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$. En admettant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$, déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$.
Es-que notre résultat concorde avec notre conjecture ?

2 Système différentiel

On se propose dans cette exercice de résoudre le système différentiel

$$(S) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} x' & = & & & y & + & z & + & f \\ y' & = & -4x & + & 5y & + & 3z & + & 2f \\ z' & = & 2x & - & 2y & & & - & f \\ f' & = & x & - & y & - & z & + & f \end{array}\right.$$

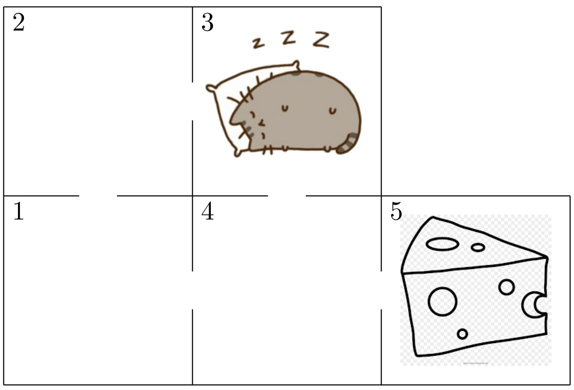
1. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ f \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ f' \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice A tel que $X' = AX$.
2. Vérifier par le calcul que $(A - I_4)^2(A - 2I_4)^2 = 0_4$.
3. En déduire les éléments propres de A. A est-elle diagonalisable ?

On pose $X_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $X_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$. De même, on pose $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & -1\\-1 & 1 & 1 & 1\\-1 & 1 & 0 & 1\\-1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

4. Calculer PQ.
   Que peut-on en déduire sur P ? sur la famille $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$?
5. Déterminer une matrice T tel que $A = PTP^{-1}$.
6. On pose $X = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\\f_0\end{pmatrix} := P^{-1}Y$ et on admet que $X' = \begin{pmatrix}x_0'\\y_0'\\z_0'\\f_0'\end{pmatrix} := P^{-1}Y'$.
   Montrer que Y est solution de (S) si et seulement si X est solution de $X' = TX$.
7. Résoudre le système différentielle $X' = TX$. (On pourra commencer par résoudre les équations de la deuxième ligne et de la quatrième ligne. On cherchera si nécessaire des solutions particulière sous la forme du produit d'un polynôme de degré 1 et d'une exponentielle.)
8. En déduire l'ensemble des solutions de S.

3 Chaîne de Markov

Une souris se balade au hasard dans une maison à la recherche de nourriture.
Si, à l'instant n, elle se trouve dans une pièce vide alors elle choisit une pièce adjacente au hasard (selon une loi uniforme) et s'y rend à l'instant $n+1$.
Si elle est à l'instant n dans une pièce où se trouve de la nourriture (un fromage par exemple), elle y reste.
Mais attention ! Si par malheur elle rentre dans une pièce où se trouve un chat, elle se fait manger (et on considère donc qu'elle reste dans cette pièce).
Heureusement pour la souris, le chat est confortablement installé pour sa sieste et reste donc toujours dans la même pièce. Le plan de la maison est donné ci-dessous.



La position de la souris à l'instant 0 suit une loi uniforme sur $[\![1, 5]\!]$.

1. (a) Modéliser cette situation par une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. On précisera sa matrice de transition M et son graphe.
   (b) Déterminer la loi de X_2.
   (c) Déterminer les états stables de la chaîne.
2. On note T_5 la variable aléatoire définie par :
$$T_5 = \inf\{n \geq 0 \ ; \ X_n = 5\}.$$
La variable aléatoire T_5 représente le temps que la souris met pour atteindre le fromage. On considère que $T_5 = +\infty$ si la souris n'atteint jamais le fromage. Pour tout $i \in E$ on note
$$u_i = P_{[X_0=i]}(T_5 < +\infty).$$
Ainsi u_i est la probabilité que la souris atteigne le fromage en partant de la pièce numéro i.
   (a) Déterminer u_5 et u_3.
   (b) Justifier que pour tout $i \in E$, $u_i = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_{X_0=i}(T_5 = n)$.
   (c) Expliquer pourquoi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(i, j) \in E^2$,
$$\mathbb{P}_{X_0=i,X_1=j}(T_5 = n) = \mathbb{P}_{X_0=j}(T_5 = n - 1).$$
   (d) Calcul de u_1 :
      i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que
$$\mathbb{P}_{X_0=1}(T_5 = n) = \frac{\mathbb{P}_{X_0=2}(T_5 = n - 1) + \mathbb{P}_{X_0=4}(T_5 = n - 1)}{2}.$$
      ii. En déduire $u_1 = \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_4$
   (e) On admet que $u_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_3$ et que $u_4 = \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_3 + \frac{1}{3}u_5$. En déduire les valeurs de u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
   (f) La souris a-t-elle plus de chance de manger le fromage ou d'être mangé par le chat ?

4 Variable aléatoire à densité

On se propose de définir et d'étudier ici la loi à densité γ. Pour cela on commencera par travailler sur l'intégrale à paramètre Γ.

4.1 L'intégrale à paramètre Γ

On pose $\Gamma : x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t} \, dt$

1. (a) Justifier que pour tout $x \in [1, +\infty[$, la fonction $f_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
   (b) En déduire que $\Gamma(x)$ est bien définie sur $[1, +\infty[$.

2. Soit $x \in [1, +\infty[$. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\int_0^A t^x e^{-t}\, dt = -A^x e^{-A} + x \int_0^A t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

3. En déduire que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Remarque : La fonction Γ est en réalité définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Sur $]0, 1[$ l'étude est plus subtile car il s'agit d'une intégrale également impropre en 0. Dans la suite du sujet nous admettrons que Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que la propriété $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

4.2 Définitions et moments de la loi gamma

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+*$. On pose

$$\begin{array}{cccc} f_\alpha & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} \text{ si } x > 0 \end{array} \right. \end{array}$$

5. Montrer que f_α est une densité d'une variable aléatoire à densité.

On dit qu'une variable aléatoire à densité ademettant pour densité f_α suit une loi gamma de paramètre α et on note $X \hookrightarrow \gamma(\alpha)$.

6. Soit $X \hookrightarrow \gamma(\alpha)$.
   (a) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour X admet un moment d'ordre r et l'exprimer à l'aide de Γ.
   (b) En déduire que X admet une espérance et une variance et les calculer en fonction de α.

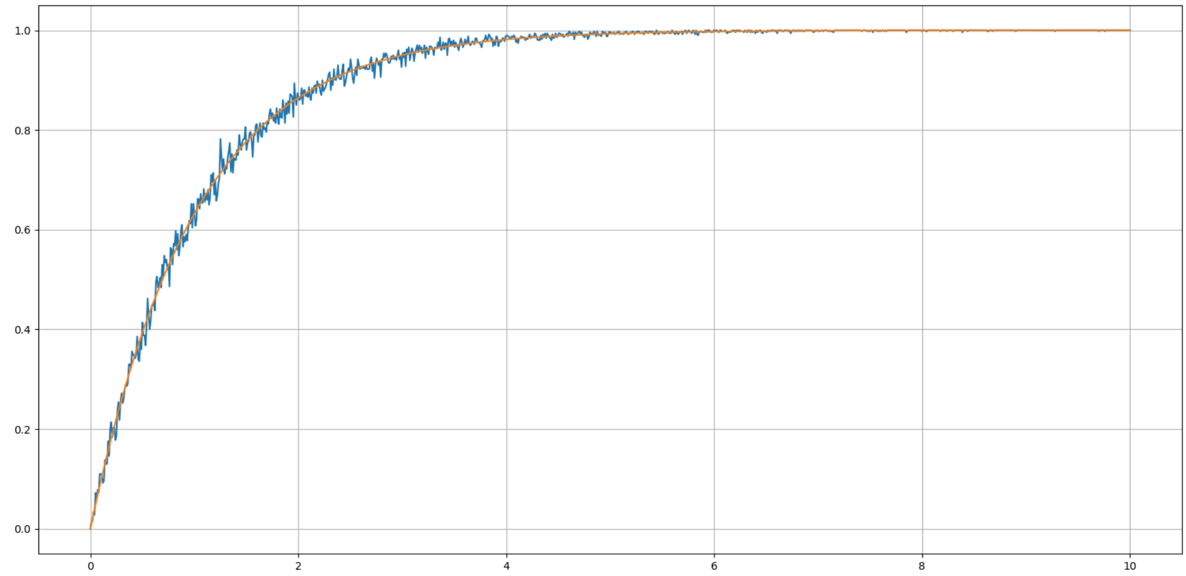
4.3 Aspect informatique

Python permet de simuler une loi gamma à l'aide de la commande $rd.gamma(a)$ de la bibliothèque numpy.random importé sous le préfixe rd qui renvoie une simulation d'une loi gamma de paramètre a.

Tout les codes seront supposés écrit à la suite, nous n'aurons donc besoin d'importer les bibliothèques qu'une seule fois.

7. Écrire une fonction python prenant en argument un réel strictement positif a et traçant la fonction f_a sur $[0, 10]$.
8. On se propose à présent d'écrire un code nous permettant de tracer une approximation de la fonction de répartition d'une loi gamma X. Pour cela on va commencer par écrire une fonction nous permettant d'estimer $F_X(x)$ pour tout x puis on tracera notre graphique
   (a) Écrire une fonction FX(x,a) qui prend en argument un réel x et un réel strictement positif a et qui renvoie une estimation de $F_X(x)$ où $X \hookrightarrow \gamma(a)$ à l'aide de 1000 simulations de X.
   (b) Écrire une fonction RepresentationGraphique(a) qui renvoie une projection de la courbe de F_X où $X \hookrightarrow \gamma(a)$ sur $[0, 10]$.

(c) Le graphique ci-dessous est le graphique obtenue grâce au code précédent auquel on adjoint le tracé de la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1.



Justifier la proximité des deux courbes.