Programme

- Variables aléatoires à densités. Définitions, fonctions de répartitions et densités. Caractérisations de ces fonctions. Espérance et variances. Théorème de transfert.
- Lois à densité usuelles. Loi uniforme, loi exponentielle et loi normale.
- Variables aléatoires réelles. Notion d'indépendance et de mutuelle indépendance. Espérance et variance.

Questions de cours

1. Définitions d'une variable aléatoire à densité et d'une densité. Énoncer des caractérisations des fonctions de répartitions et des densités. (Définitions 16.1.1 et 16.1.3 et propriétés 16.1.9 et 16.1.12)
2. Soit $f : x \mapsto ce^{-|x|}$. Déterminer c pour que f soit la densité d'une variable aléatoire à densité X. Déterminer F_X puis (en justifiants l'existence) $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$. (TD 15, Exercice 3)
3. Énoncer de la fonction de répartition et d'une densité d'une loi exponentielle ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance. Démonstrations des propriétés (Définition 16.3.7, propriétés 16.3.8 et 16.3.9 et TD 15, Exercice 7)
4. Énoncer de la fonction de répartition et d'une densité d'une loi uniforme ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance. Pour $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $Y = \frac{-1}{\lambda}\ln(1-X)$. Déterminer la loi de Y. (Définition 16.3.1, propriétés 16.3.2 et 16.3.2 et exemple 16.4.5.)
5. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On pose $U = \max(X,Y)$ et $V = \min(X,Y)$. Exprimer F_U et F_V.
   Dans le cas où $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$, déterminer V, puis étendre ce résultat à n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi exponentielle. (TD 17, Exercice 2)
6. Montrer que pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ a\frac{b^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geq b \end{cases} \end{array}$
   est une densité d'une variable aléatoire que l'on notera X et qu'on appellera loi de Pareto. Déterminer F_X.
   Pour $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1])$, déterminer la loi de $bU^{-\frac{1}{a}}$. Coder une simulation d'une loi de Pareto. (TD 17, Exercice 4, questions 1 à 3)