TD 21 - Estimations

▷ **Exercice 1 :** Soit X une variable aléatoire possédant une espérance m et un moment d'ordre 2 noté m_2. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de la loi de X. On appelle variance empirique de l'échantillon la variable :

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \overline{X}_n)^2.$$

1. Calculer $\mathbb{E}(\overline{X_n}^2)$.
2. On considère S_n^2 comme un estimateur de $V(X)$. Déterminer son biais. Est-ce un estimateur sans biais ? Asymptotiquement sans biais ?
3. Montrer que $\frac{n}{n-1} S_n^2$ est un estimateur sans biais de $V(X)$.

▷ **Exercice 2 :** Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ inconnu. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de la loi de X.

1. Montrer que $e^{-\overline{X}_n}$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de $e^{-\theta}$.
2. Déterminer son risque quadratique.
3. Est-ce un estimateur convergent de θ ?

▷ **Exercice 3 :** La durée de vie d'une lampe est modélisée par une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre λ. On cherche à estimer la durée de vie moyenne $\frac{1}{\lambda}$ de la lampe. On prélève un échantillon de n lampes et on note X_1,…,X_n leurs durées de vie.

1. Montrer que $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais de $\frac{1}{\lambda}$ et déterminer son risque quadratique.
2. On pose $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.
   (a) Déterminer la loi de Y_n. (On pourra s'aider d'une ancienne question de khôlle qu'il faut savoir refaire)
   (b) En déduire que nY_n est un estimateur sans biais de $\frac{1}{\lambda}$.
   (c) Calculer son risque quadratique.
3. Comparer les deux estimateurs.

▷ **Exercice 4 :** [ESC 2006] Dans cet exercice R désigne un réel fixé strictement positif et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t \notin [0\,;\,R] \\ f(t) = \dfrac{2t}{R^2} & \text{si } t \in [0\,;\,R] \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. On note dans toute la suite X une variable aléatoire réelle de densité f. Déterminer sa fonction de répartition F_X.
3. (a) Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = \dfrac{2R}{3}$.

   (b) Montrer que X admet une variance et que $V(X) = \dfrac{R^2}{18}$

Dans toute la suite n désigne un entier naturel non nul et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On cherche à estimer le réel R à l'aide de $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

4. On note $T_n = \dfrac{3}{2n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et on cherche à estimer R avec T_n.

   Montrer que T_n est un estimateur sans biais de R et calculer son risque quadratique.
5. On note $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

   (a) Montrer que pour tout réel x , $\mathrm{P}(M_n \leq x) = (F_X(x))^n$. En déduire la fonction de répartition de M_n, puis montrer que M_n est une variable aléatoire à densité.

   (b) Montrer qu'une densité possible de M_n est la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g_n(t) = 2n\dfrac{t^{2n-1}}{R^{2n}} & \text{si } t \in [0\,;\,R] \\ g_n(t) = 0 & \text{si } t \notin [0\,;\,R] \end{cases} .$$

   (c) Montrer que M_n admet une espérance et une variance, et que :

$$E(M_n) = \frac{2n}{2n+1}R \qquad \text{et} \qquad V(M_n) = \frac{n}{(n+1)(2n+1)^2}R^2.$$

   (d) On cherche à estimer R avec M_n :
   Calculer le biais de M_n et son risque quadratique.
6. (a) Déterminer un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de $b_R(M_n)$ et $r_R(M_n)$.

   (b) Quels sont les avantages et les inconvénients des estimateurs T_n et M_n ?

▷ **Exercice 5 :** [ESSEC II 2005] Une entreprise souhaite acquérir une machine qui fabrique un certain type d'objets et qui, en fonctionnement normal, produit une proportion $p \in]0,1[$ d'objets défectueux. Le directeur veut connaître la valeur de p. Pour cela il teste la machine et prélève un échantillon de $n \in \mathbb{N}^*$ objets qu'il analyse. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, soit X_i la variable aléatoire de Bernoulli définie par

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i-\text{ème objet est défectueux} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On suppose que dans les conditions de prélèvement, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes.

1. (a) Montrer que $F_n = \dfrac{S_n}{n}$ est un estimateur sans biais de p et où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.
   (b) Calculer le risque quadratique $r_n = E\big((F_n - p)^2\big)$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n$.
2. Soit α un réel de $]0,1[$. On souhaite déterminer dans cette question un intervalle de confiance du paramètre p inconnu, au niveau de confiance $1-\alpha$, à partir de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$.
   (a) Quelle est la limite en loi de la suite $\left(\sqrt{n}\dfrac{F_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$?
   (b) Soit t_α le réel défini par $\Phi(t_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$, où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée, réduite. Montrer qu'un intervalle de confiance asymptotique de p au niveau $1-\alpha$ est donné par $[U_n, V_n]$ avec

$$U_n = F_n - \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}} \quad , \quad V_n = F_n + \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}.$$