ANNEE SCOLAIRE 2024/2025 Devoir surveillé sur table $n°4$ Date : 04/04/2025 Heure 13h30 Durée : 4h00 Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés.	Lycée Jean-Jacques ROUSSEAU Sarcelles

Dans les questions faisant intervenir des instructions en langage Python, on prendra soin d'importer les bibliothèques nécessaires lors de leur première utilisation dans chaque exercice.

1 Ecricome 2018 (Extrait)

Un forain peut installer un jeu dans une fête foraine. Le jeu consiste à lancer deux fois une pièce et le joueur gagne :

— rien si il obtient 0 pile,

— perd 10 euros si il obtient 1 pile,

— gagne 20 euros si il obtient 2 piles.

La pièce est truquée avec une probabilité $p = \frac{1}{4}$ d'obtenir pile.
Le forain estime que 200 clients participe à son jeu par jour. Il souhaite être certain, avant de s'installer dans cette fête forain, qu'il gagnera plus de 100 euros par jour avec un risque d'erreur inférieur à 10%.
On note pour tout entier i compris entre 1 et 200, G_i le gain algébrique du i-ème joueur.
On note aussi J la variable aléatoire égale au gain du forain sur toute la journée.

1. Pour tout entier $i \in [\![1, 200]\!]$, donner la loi de G_i, et calculer son espérance et sa variance.
2. Exprimer la variable aléatoire J en fonction des variables aléatoires G_i.
Démontrer alors que $\mathbb{E}(J) = 500$ et que $V(J) = 11250$.
3. Justifier que $\mathbb{P}(J \leq 100) \leq \mathbb{P}(|J - 500| \geq 400)$.
4. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, puis montrer que
$$\mathbb{P}(J \leq 100) \leq \frac{9}{128}.$$
5. Compte tenu de ses exigences de rentabilité, le forain peut-il installer son stand ?

Remarque : Il s'agit ici d'une sous partie IV d'un problème, les trois précédentes ont étaient traitées lors du second concours blancs l'année dernière.

1. Soit $i \in [\![1, 200]\!]$. On observe que $G_i(\Omega) = \{-10, 0, 20\}$. On notant P_1 (resp. P_2) l'évènement le joueur obtient pile au premier (resp deuxième) lancer. On observe, par indépendance des lancers, que la loi de G_i est :
   — $\mathbb{P}(G_i = 0) = \mathbb{P}(\overline{P_1} \cap \overline{P_2}) = (1-p)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.
   — $\mathbb{P}(G_i = -10) = \mathbb{P}((\overline{P_1} \cap P_2) \cup (P_1 \cap \overline{P_2})) = (1-p)p + p(1-p) = 2\frac{1}{4}\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ par incompatibilité des évènements impliquées dans l'union.
   — $\mathbb{P}(G_i = 20) = \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$.

Comme l'univers associée à G_i est fini, G_i admet une espérance et une variance. On a

— Par définition de l'espérance

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(G_i) &= -10\mathbb{P}(G_i=-10)+0\mathbb{P}(G_i=0)+20\mathbb{P}(G_i=20)\\ &= -\frac{30}{8}+0+\frac{20}{16}=\frac{-60+20}{16}=\frac{-40}{16}=-\frac{5}{2};\end{aligned}$$

— Par théorème du transfert, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(G_i^2) &= 100\mathbb{P}(G_i=-10)+0\mathbb{P}(G_i=0)+400\mathbb{P}(G_i=20)\\ &= \frac{300}{8}+0+\frac{400}{16}=\frac{600+400}{16}=\frac{1000}{16}=\frac{125}{2};\end{aligned}$$

— Par la formule de Koenig Hyugens, on a

$$\mathbb{V}(G_i)=\mathbb{E}(G_i^2)-\mathbb{E}(G_i)^2=\frac{125}{2}-\left(\frac{-5}{2}\right)^2=\frac{250}{4}-\frac{25}{4}=\frac{225}{4}.$$

2. Le gain du forain correspond donc aux pertes des 200 joueurs, on a donc $J=-\sum_{i=1}^{200} G_i$.

Par linéarité de l'espérance, on a que J admet une espérance et

$$\mathbb{E}(J)=-\sum_{i=1}^{200}\mathbb{E}(G_i)=-\sum_{i=1}^{200}-\frac{5}{2}=\frac{5}{2}\sum_{i=1}^{200}1=\frac{1000}{2}=500.$$

De même, comme le jeu n'est pas influé par les autres joueurs, on a que les variables aléatoires $(G_i)_{i\in[\![1,200]\!]}$ sont mutuellement indépendantes. De plus comme elles admettent toutes une espérance, on a que J admet une variance et

$$\mathbb{V}(J)=(-1)^2\sum_{i=1}^{200}\mathbb{V}(G_i)=\sum_{i=1}^{200}\frac{225}{4}=\frac{225}{4}\sum_{i=1}^{200}1=\frac{225}{4}.200=225.50=11250.$$

3. On observe que

$$\overline{(|J-500|\geq 400)}=(|J-500|<400)=(-400<J-500<400)=(100<J<900).$$

On a donc $(|J-500|\leq 400)=(J\leq 100)\cup(J\geq 900)$ donc

$$(J\leq 100)\subset(|J-500|\geq 400)$$

et donc

$$\mathbb{P}(J\leq 100)\leq\mathbb{P}(|J-500|\geq 400).$$

4. L'inégalité de Bienaimé-Tchébychev nous affirme que pour une variable aléatoire admettant une variance, on a pour tout $\epsilon\in\mathbb{R}_+^*$,

$$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|\geq\epsilon)\leq\frac{\mathbb{V}(X)}{\epsilon^2}.$$

On applique cette inégalité avec J et $\epsilon=400$. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(J\leq 100) &\leq \mathbb{P}(|J-500|\geq 400)\ \text{ par la question précédente}\\ &\leq \frac{\mathbb{V}(J)}{400^2}=\frac{11250}{160000}=\frac{1125}{16000}\\ &= \frac{5\times 225}{1000\times 16}=\frac{5\times 25\times 9}{5\times 8\times 25\times 16}=\frac{9}{128}\end{aligned}$$

5. Comme $9 < 12,8$, on a que $\frac{9}{128} < 0,1$ donc le forain a moins de 10% de chance de gagner moins de 100 euros par jours, il peut donc installer son stand en respectant ces critères de rentabilités.

2 Ecricome 2020

Soit a un réel strictement positif.

1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose

$$I_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt.$$

Montrer que l'intégrale $I_n(a)$ converge et vaut $\frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < a, \\ \frac{3a^3}{t^4} \text{ si } t \geq a. \end{cases}$$

   (a) Démontrer que f est bien une densité de probabilité. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

   (b) Donner la fonction de répartition de X.

   (c) Démontrer que X admet une espérance et calculer cette espérance.

   (d) Démontrer que X admet une variance et que celle-ci vaut $\frac{3a^2}{4}$.

3. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1]$. On pose $Y = \frac{a}{U^{\frac{1}{3}}}$.

   (a) Déterminer $Y(\Omega)$.

   (b) Déterminer la fonction de répartition de Y et vérifier que Y et X suivent la même loi.

   (c) Écrire une fonction en langage Python nommé simulX prenant en argument a, m et n où a est un réel strictement positif et m et n sont deux entiers naturels non nuls et qui renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient est un réel choisi de façon aléatoire en suivant la loi de X. Ces réels seront choisis de façon indépendante.
   On précise que la commande random((m,n)) de la bibliothèque numpy.random renvoie une matrice à m lignes et n colonnes où chaque coefficients de la matrice est une simulation indépendante d'une loi uniforme sur $[0,1[$.

4. (a) Calculer $\mathbb{P}(X > 2a)$.

   (b) Calculer $\mathbb{P}_{X>2a}(X > 6a)$.

   (c) On suppose que la fonction Python de la question 3 a été programmée correctement et compilée. Compléter le script ci-dessous afin qu'il renvoie une valeur permettant de vérifier le résultat de la question précédente.

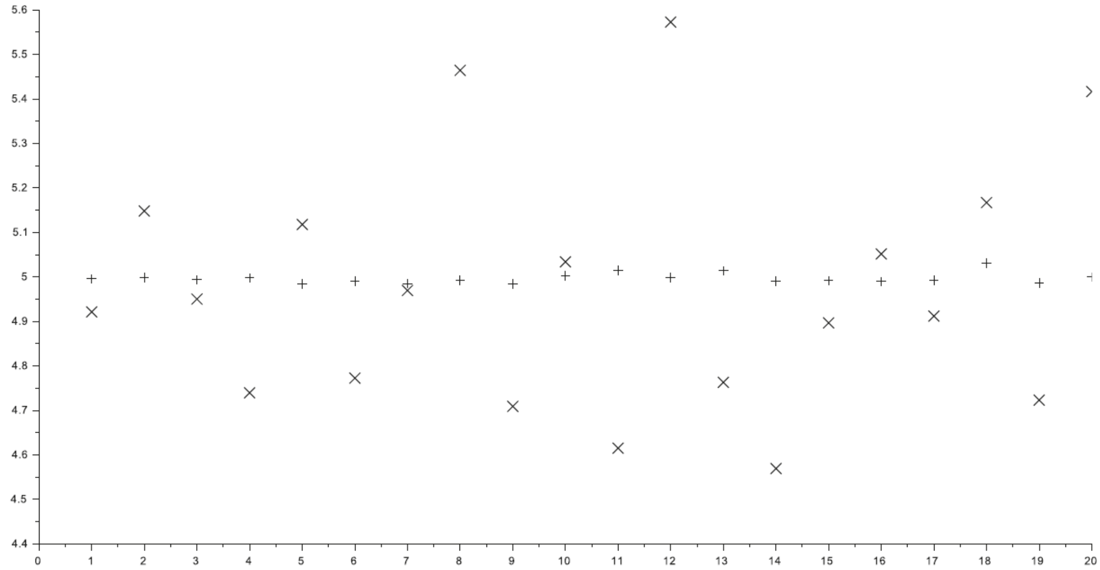
```
a = 10
N = 100000
s1 = 0
s2 = 0
X = simulX(a,1,N)
for k in range(1,N+1) :
    if ·········
        s1 = s1 + 1
        if X[0,k]>6*a :
            ·········
if s1 > 0 :
    print(·········)
```

On cherche dans la suite de l'exercice à estimer le paramètre a.
Soit n un entier naturel non nul, et $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoire indépendantes et suivant toutes la même loi que X.

5. On pose $V_n = \frac{2}{3n} \sum_{k=1}^{n} X_k$.
   (a) Montrer que V_n est un estimateur sans biais pour le paramètre a.
   (b) Calculer son risque quadratique et vérifier que celui-ci vaut $\frac{a^2}{3n}$.
6. On pose $W_n = \min(X_1, ..., X_n)$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de W_n et vérifier que W_n est bien une variable aléatoire à densité.
   (b) Montrer que W_n admet pour densité la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$\forall t \in \mathbb{R}, f_n(t) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } t < a \\ \frac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} \ \text{ si } t \geq a. \end{cases}$$
   (c) Démontrer que W_n admet une espérance et calculer cette espérance.
   Déterminer alors l'unique réel λ_n dépendant de n tel que $\lambda_n W_n$ est un estimateur sans biais pour le paramètre a.
   (d) Calculer le risque quadratique de $\lambda_n W_n$ et vérifier que celui-ci vaut $\frac{a^2}{3n(3n-2)}$.
7. (a) Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle réalise m simulations de la variable aléatoire V_n et renvoie les résultats obtenus sous forme d'une matrice ligne à m éléments :

```
·········
def simulV(a,m,n) :
    X = simulX(a,m,n)
    V = np.zeros((1,m))
    for k in ······
        V[0,k] = ·········
    return V
```

   Pour la suite, on prend $n = 100$ et on suppose que l'on dispose d'une fonction similaire simulW permettant d'obtenir m simulations de la variable aléatoire $\lambda_n W_n$.
   (b) Écrire les lignes de codes permettant ayant permis d'obtenir le graphique suivant :



On justifiera en amont le choix des paramètres ainsi que l'attribution des symboles $+$ et $\times$.

1. On reconnait une intégrale de Riemann de paramètre $n > 1$ donc convergente. Retrouvons à présent la valeur de cette intégrale.
   Soit $A \in [a, +\infty[$. On a
$$\int_a^A \frac{1}{t^n}\,dt = \left[\frac{-1}{n-1}\frac{1}{t^{n-1}}\right]_a^A = \frac{-1}{n-1}\frac{1}{A^{n-1}} - \frac{-1}{n-n}\frac{1}{a^{n-1}}$$
$$= \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{a^{n-1}} - \frac{1}{A^{n-1}}\right)$$
   or $\lim\limits_{A \to +\infty} \frac{1}{A^{n-1}} = 0$ car $n - 1 > 0$ donc on retrouve bien la convergence de l'intégrale impropre et l'on a
$$I_n(a) = \frac{1}{(n-1)a^{n-1}}.$$

2. (a) f est nulle sur $]-\infty, a[$ donc est continue et positive sur cette ensemble. De plus comme a est positif, sur $[a, +\infty[(\subset \mathbb{R}_+^*)$ f est positif. De même sur $]a, +\infty[$ f est continue en tant que multiple d'une fonction puissance. On a donc que f est positive sur $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en a.
   Il nous reste donc à vérifier la convergence de l'intégrale doublement impropre
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_a^{+\infty} \frac{3a^3}{t^4}\,dt = 3a^3 \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^4}\,dt.$$
   On reconnait $I_4(a)$ qui converge par la question précédente donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et on a
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 3a^3 \frac{1}{(4-1)a^{4-1}} = 3a^3 \frac{1}{3a^3} = 1$$

donc f est bien une densité de probabilité.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

— Si $x \leq a$, alors $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$.

— Si $x \geq a$, alors

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{a}^{x} f(t)\, dt = 3a^3 \int_a^x \frac{1}{t^3}\, dt \\ &= 3a^3 \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{x^3}\right) \text{ par les calculs de la question 1} \\ &= \frac{a^3}{a^3} - \frac{a^3}{x^3} = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^3 \end{aligned}$$

La fonction de répartition de X est donc

$$\begin{array}{rcll} F_X & : & \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq a \\ 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^3 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

(c) X admet une espérance si et seulement si l'intégrale doublement impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\, dt = \int_a^{+\infty} tf(t)\, dt = 3a^3 \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^3}$ converge absolument. Sous cette dernière forme il s'agit d'une intégrale d'une fonction positive donc cela revient à la convergence simple et l'on reconnait de plus $I_3(a)$ qui est une intégrale convergente. On a donc bien que X admet une espérance et

$$\mathbb{E}(X) = 3a^3 I_a(3) = 3a^3 \frac{1}{2a^2} = \frac{3a}{2}.$$

(d) Par le théorème de transfert X^2 admet une espérance si l'intégrale $\int_a^{+\infty} t^2 f(t)\, dt = 3a^3 \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est absolument convergente or il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive donc cela revient à la convergence simple. On reconnait $I_2(a)$ qui est convergente donc X^2 admet une espérance et l'on a

$$\mathbb{E}(X^2) = 3a^3 \frac{1}{1.a} = 3a^2.$$

X admet donc un moment d'ordre 2 et donc une variance et par la formule de Koenig-Hyugens, on a

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 3a^2 - \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{9}{4}\right) a^2 = \frac{3a^2}{4}.$$

3. (a) On observe que $Y = h(U)$ où $\begin{array}{rcll} h & : &]0,1] & \to \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto \frac{a}{x^{\frac{1}{3}}} \end{array}$. h est dérivable sur $]0,1]$ en tant que multiple d'une fonction puissance. On a de plus pour tout $x \in]0,1]$

$$h'(x) = -\frac{1}{3}\frac{a}{x^{\frac{4}{3}}} < 0.$$

On a donc que h est strictement décroissante donc

$$h(]0,1]) = [h(1), \lim_{x\to 0^+} h(x)[= [a, +\infty[.$$

On en déduit donc que $Y(\Omega) = [a, +\infty[$.

(b) On rappelle que $\begin{array}{rccl} F_U & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si } 1 < x \end{cases} \end{array}$.

Par ce qui précède pour tout $x \in]-\infty, a[$, on a $F_Y(x) = 0 = F_X(x)$.
Soit $x \in [a, +\infty[$, on a alors

$$\begin{aligned}(Y \leq x) &= \left(\frac{a}{U^{\frac{1}{3}}} \leq x\right) = (a \leq xU^{\frac{1}{3}}) \\ &= \left(\frac{a}{x} \leq U^{\frac{1}{3}}\right) = \left(\left(\frac{a}{x}\right)^3 \leq U\right) \\ &= \overline{\left(U < \left(\frac{a}{x}\right)^3\right)} = \overline{\left(U \leq \left(\frac{a}{x}\right)^3\right)}\end{aligned}$$

car U est à densité. De plus on a $\left(\frac{a}{x}\right)^3 \in [0,1]$ donc on en déduit

$$F_Y(x) = 1 - \mathbb{P}\left(U \leq \left(\frac{a}{x}\right)^3\right) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^3 = F_X(x).$$

On a donc bien que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = F_X(x)$ donc $F_Y = F_X$ et comme la fonction de répartition caractérise les lois, on a que X et Y suivante la même loi.

(c)

```
import numpy.random as rd
def simulX(a,m,n) :
        U = rd.random((m,n))
        Y = a/(U**(1/3))
        return Y
```

4. (a) On a $\mathbb{P}(X > 2a) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2a) = 1 - F_X(2a) = 1 - \left(1 - \left(\frac{a}{2a}\right)^3\right) = 1 - 1 + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \neq 0$.

(b) Comme $(X > 6a) \subset (X > 2a)$, on a $\mathbb{P}((X > 2a) \cap (X > 6a)) = \mathbb{P}(X > 6a) = 1 - F_X(6a) = 1 - \left(1 - \left(\frac{a}{6a}\right)^3\right) = 1 - 1 + \frac{1}{6^3} = \frac{1}{27.8}$. On a donc

$$\mathbb{P}_{X>2a}(X > 6a) = \frac{\mathbb{P}((X > 2a) \cap (X > 6a))}{\mathbb{P}(X > 2a)} = \frac{\frac{1}{27.8}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{27}.$$

(c)

```
a = 10
N = 100000
s1 = 0
s2 = 0
X = simulX(a,1,N)
for k in range(1,N+1) :
        if X[0,k]> 2 * a :
                s1 = s1 + 1
                if X[0,k]>6*a :
                        s2 = s2 + 1
if s1 > 0 :
        print(s2/s1)
```

5. (a) Par linéarité de l'espérance on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(V_n) &= \frac{2}{3n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k)\\ &= \frac{2}{3n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X) \text{ car } X \text{ et } X_k \text{ ont la même loi pour tout } k\\ &= \frac{2}{3n}n\mathbb{E}(X) = \frac{2}{3}\frac{3a}{2} = a\end{aligned}$$

On a donc bien que V_n est un estimateur sans biais de a.

(b) Dans le cas d'un estimateur sans biais, le risque quadratique correspond à la variance. On a donc par indépendances mutuelles des variables aléatoires $X_1, ..., X_n$,

$$\begin{aligned}r_a(V_n) = \mathbb{V}(V_n) &= \frac{4}{9n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k)\\ &= \frac{4}{9n^2}n\mathbb{V}(X) \text{ par le même argument qu'à la question précédente}\\ &= \frac{4}{9n}\frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{3n}\end{aligned}$$

6. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $(W_n > x) = \left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i > x)\right)$ donc

$$\begin{aligned}F_{W_n}(x) = 1 - \mathbb{P}(W_n > x) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i > x)\right)\\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i > x) \text{ par mutuelle indépendance}\\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_{X_i}(x)) = 1 - (1 - F_X(x))^n\end{aligned}$$

car pour tout i X_i à la même loi que x.
On a donc, si $x \in]-\infty, a[$, $F_{W_n}(x) = 1 - (1-0)^n = 1 - 1 = 0$ et si $x \in [a, +\infty[$,

$$F_{W_n}(x) = 1 - \left(1 - \left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^3\right)\right)^n = 1 - \left(\left(\frac{a}{x}\right)^3\right)^n = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{3n}.$$

On a donc

$$F_{W_n} : \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < a\\ 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^{3n} & \text{sinon}\end{cases}\end{array}.$$

On a que F_{W_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ et pour que W_n soit une variable aléatoire à densité il nous reste qu'à vérifier la continuité en a. On a $\lim\limits_{x\to a^-} F_{W_n}(x) = 0 = F_{W_n}(a)$ et $\lim\limits_{x\to a^+} F_{W_n}(x) = 1 - \left(\frac{a}{a}\right)^{3n} = 1 - 1 = 0 = F_{W_n}(a)$.
On a donc bien que F_{W_n} est continue en a donc W_n est une variable aléatoire à densité.

(b) On a pour $x \in]-\infty, a[$, $F'_{W_n}(x) = 0$ et pour $x \in]a, +\infty[$,

$$F'_{W_n}(x) = -a^{3n}\frac{-3nx^{3n-1}}{x^{6n}} = \frac{3na^{3n}}{x^{3n+1}}.$$

En donnant une valeur positive arbitraire en a, on obtient de ces calculs que

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} & \text{si } t \geq a \end{cases} \end{array}$$ est une densité de W_n.

(c) Par définition W_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf_n(t)\,dt = \int_a^{+\infty} tf_n(t)\,dt = 3na^{3n}\int_a^{+\infty}\frac{dt}{t^{3n}}$ est absolument convergente. Sous cette dernière écriture il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive donc la convergence absolue revient à la convergence classique et l'on reconnait $I_{3n}(a)$ qui par la première question est une intégrale convergente. On a donc que W_n admet une espérance et

$$\mathbb{E}(W_n) = 3na^{3n}I_{3n}(a) = 3na^{3n}\frac{1}{(3n-1)a^{3n-1}} = \frac{3n}{3n-1}a.$$

Pour que $\lambda_n W_n$ soit sans biais, on doit avoir $\mathbb{E}(\lambda_n W_n) = a$ or par linéarité de l'espérance, on a $\lambda_n \frac{3n}{3n-1}a = a$. On a ainsi que l'unique réel pour lequel $\lambda_n W_n$ est un estimateur sans biais de a est

$$\lambda_n = \frac{3n-1}{3n}.$$

(d) Dans le cas d'un estimateur sans biais, on a que le risque quadratique revient au calcul de la variance. W_n admet une variance par théorème du transfert si et seulement si l'intégrale $\int_a^{+\infty} t^2 f(t)\,dt = 3na^{3n}\int_a^{+\infty}\frac{dt}{t^{3n-1}}$ est absolument convergente, et par positivité de la fonction considérée, convergente. On reconnait $I_{3n-1}(a)$ qui est convergent donc W_n admet une variance et l'on a

$$\mathbb{E}(W_n^2) = 3na^{3n}\frac{1}{(3n-2)a^{3n-2}} = \frac{3n}{3n-2}a^2.$$

Par la formule de Koenig-Hyugens, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(W_n) &= \mathbb{E}(W_n^2) - \mathbb{E}(W_n)^2 \\
&= \frac{3n}{3n-2}a^2 - \left(\frac{3n}{3n-1}a\right)^2 \\
&= 3na^2\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{3n}{(3n-1)^2}\right) = 3na^2\frac{(3n-1)^2 - 3n(3n-2)}{(3n-1)^2(3n-2)} \\
&= 3na^2\frac{9n^2 - 6n + 1 - 9n^2 + 6n}{(3n-1)^2(3n-2)} = \frac{3na^2}{(3n-1)^2(3n-2)}
\end{aligned}$$

et donc le risque quadratique est

$$\mathbb{V}(\lambda_n W_n) = \lambda_n^2\mathbb{V}(W_n) = \frac{(3n-1)^2}{(3n)^2}\frac{3na^2}{(3n-1)^2(3n-2)} = \frac{a^2}{3n(3n-2)}.$$

7. (a)

```
import numpy as np
def simulV(a,m,n) :
    X = simulX(a,m,n)
    V = np.zeros((1,m))
    for k in range(m) :
        V[0,k] = 3**np.mean(X[k])/2
    return V
```

(b) On observe que les valeurs se stabilisent autour de 5 donc $a = 5$. De plus, on réalise 20 simulations donc $m = 20$. Enfin le risque quadratique est plus faible pour $\lambda_n W_n$ (il a une progression quadratique) donc le symbole $+$ correspond à cet estimateur. On a donc que V_n est représente par $\times$. Un code permettant d'obtenir cette simulation est

```
import matplotlib.pyplot as plt
X = range(1,21)
V = simulV(5,20,100)
W = simulW(5,20,100)
plt.plot(X,V[0],'x')
plt.plot(X,W[0],'+')
plt.show()
```

3 EMLyon 2016

Partie I : Étude d'une variable aléatoire

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $f(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$.

1. Vérifier que la fonction f est paire.
2. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.
   Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.
3. Déterminer la fonction de répartition de X.
4. (a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge.
   (b) En utilisant l'imparité de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto tf(t)$, montrer que X admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(X) = 0$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(-t) &= \frac{e^t}{(1+e^t)^2} = \frac{e^t}{(e^t(e^{-t}+1))^2} \\ &= \frac{e^t}{e^{2t}(e^{-t}+1)^2} = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} = f(t) \end{aligned}$$

   On a donc bien que la fonction f est paire.
2. On observe que $t \mapsto e^{-t}$ et $t \mapsto (1+e^{-t})^2$ sont des fonctions continues, ne s'annulant jamais et positives donc f est continue et positive sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout $A \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^A f(t)\,dt = \int_0^A \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt = \int_0^A -\frac{-e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt$$

$$= \left[\frac{1}{1+e^{-t}}\right]_0^A = \frac{1}{1+e^{-A}} - \frac{1}{1+e^0}$$
$$= \frac{1}{1+e^{-A}} - \frac{1}{2}$$

On a, comme $\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-A}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1+0} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et l'on a $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{1}{2}$.
De même, on a par changement de variable et parité de f :

$$\int_{-A}^0 f(t)\,dt = \int_{--A}^0 f(-u)(-du) = -\int_A^0 f(u)\,du = \int_0^A f(u)\,du$$

donc par les calculs précédents, $\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}$. On a donc que l'intégrale doublement impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^0 f(t)\,dt + \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

donc f est bien une densité d'une variable aléatoire réelle.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt = \int_{-\infty}^0 f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{2}\right) \text{ par les calculs précédents}$$
$$= \frac{1}{1+e^{-x}}$$

4. (a) On observe que $t^2 t f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^3 e^{-t}$ et comme par croissance comparée $\lim_{t\to+\infty} t^3 e^{-t} = 0$, on a que $\lim_{t\to+\infty} t^2 t f(t) = 0$ donc $tf(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de l'infini en tant qu'intégrale de Riemann convergente de paramètre $2 > 1$, continue et positive sur ce même voisinage, on a par théorème de comparaison sur les intégrales à termes positifs que la fonction $t \mapsto tf(t)$ est intégrable au voisinage de l'infini.
Comme f est continue sur $[0, +\infty[$, on a que $\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt$ est convergente.

   (b) Soit $A \in \mathbb{R}_+$. On a

$$\int_{-A}^0 tf(t)\,dt = \int_{--A}^0 -uf(-u)(-du) \text{ par changement de variable} t = -u$$
$$= \int_A^0 uf(u)\,du \text{ par parité de f}$$
$$= -\int_0^A uf(u)\,du$$

On a donc par la question précédente que $\int_{-\infty}^0 tf(t)\,dt$ est convergente car $\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt$ l'est et on a $\int_{-\infty}^0 tf(t)\,dt = -\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt$.

On en déduit donc que l'intégrable doublement impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ est convergente donc X admet une espérance et l'on a

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{0} tf(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} tf(t)\,dt = -\int_{0}^{+\infty} tf(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} tf(t)\,dt = 0.$$

Partie II : Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \ln(1 + e^x)$.

5. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.
6. Exprimer, pour tout y de I, $\varphi^{-1}(y)$.
   On définit la variable aléatoire réelle Y définie par : $Y = \varphi(X)$.
7. Justifier $\mathbb{P}(Y \leq 0) = 0$.
8. Déterminer la fonction de répartition de Y.
9. Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

5. On observe que φ est dérivable en tant que composition de la fonction $x \mapsto 1+e^x$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $]1, +\infty[$ avec la fonction logarithme qui est dérivable sur $]1, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$. On a de plus pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$\varphi'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} > 0.$$

   On a donc que φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et est continue (car dérivable) donc φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\varphi(\mathbb{R})$ par le théorème de la bijection.
   De plus on a $I := \varphi(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x), \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)[$ par la croissance de f.
   On a par continuité du logarithme $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = \ln(1 + 0) = \ln(1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} \ln(t) = +\infty$. Ainsi φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $I = \mathbb{R}_+^*$.
6. On a pour tout $y \in I$, l'existence d'un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que :

   $$\begin{aligned}\varphi(x) = y \Leftrightarrow \ln(1 + e^x) = y &\Leftrightarrow 1 + e^x = e^y \\ &\Leftrightarrow e^x = e^y - 1 \Leftrightarrow x = \ln(e^y - 1)\end{aligned}$$

   (On a bien que $e^y - 1 > 0$ car $y > 0$.) On en déduit donc que

   $$\varphi^{-1} \; : \; \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(e^x - 1) \end{array}.$$

7. φ ne prend des valeurs que dans $\mathbb{R}_+^*$ donc Y ne prend que des valeurs strictement positives donc $Y \leq 0$ est un évènement impossible donc $\mathbb{P}(Y \leq 0) = 0$.
8. Par ce qui précède pour tout $t \in \mathbb{R}_-$, $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) \leq \mathbb{P}(Y \leq 0) = 0$ donc $F_Y(t) = 0$ par positivité d'une fonction de répartition.
   Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a

   $$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(\varphi(X) \leq t) = \mathbb{P}(X \leq \varphi^{-1}(t))$$

$$= F_X(\varphi^{-1}(t)) = F_X(\ln(e^t - 1)) = \frac{1}{1 + e^{-\ln(e^t-1)}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^t-1}}$$

$$= \frac{e^t - 1}{e^t - 1 + 1} = \frac{e^t - 1}{e^t} = 1 - e^{-t}$$

On a donc

$$F_Y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-t} & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$

9. On reconnait la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1 et par caractérisation de la loi par la fonction de répartition, on a $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.
On a donc que Y admet une espérance et une variance et

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{1} = 1 \text{ et } \mathbb{V}(Y) = \frac{1}{1^2} = 1.$$

Partie III : Étude d'une convergence en loi

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f, où f a été définie dans la partie I.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, ..., X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

10. (a) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n.

    (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(U_n \leq x) = \left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}$.

11. En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

10. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} F_{T_n}(x) &= \mathbb{P}(T_n \leq x) = \mathbb{P}(\max(X_1, ..., X_n) \leq x) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \leq x\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq x) \text{ par indépendance des } X_i \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq x)^n \text{ car toutes les variables aléatoires ont la même loi} \\ &= F_{X_1}(x)^n = \frac{1}{(1 + e^{-x})^n} \end{aligned}$$

    (b) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U_n \leq x) &= \mathbb{P}(T_n - \ln(n) \leq x)\mathbb{P}(T_n \leq x + \ln(n)) \\ &= F_{T_n}(x + \ln(n)) = \frac{1}{(1 + e^{-x-\ln(n)})^n} = \frac{1}{(1 + \frac{e^{-x}}{n})^n} \\ &= (1 + \frac{e^{-x}}{n})^{-n} \end{aligned}$$

11. On rappelle que pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{\lambda}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{\lambda+\underset{n\to+\infty}{o}(1)}$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{\lambda}$.
Par les calculs précédents, on a que pour tout $x \in \mathbb{N}$, $F_{U_n}(x) = \frac{1}{(1+\frac{e^{-x}}{n})^n}$ et donc par la remarque précédente, on a

$$\lim_{n\to+\infty} F_{U_n}(x) = \frac{1}{e^{e^{-x}}} = \exp\left(-e^{-x}\right).$$

On pose $\begin{array}{cccc} F & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \exp\left(-e^{-x}\right) \end{array}$ et montrons qu'il s'agit d'une fonction de répartition. Il s'agit d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (donc elle est également continue sur $\mathbb{R}$) en tant que composée de fonctions exponentielle.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = e^{-x}\exp\left(-e^{-x}\right) > 0$$

donc F est une fonction croissante. On a enfin par continuité de la fonction exponentielle :

— $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} \exp(-t) = 0$

— $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = e^{-0} = 1$

On a donc bien que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z.
De plus comme $F' : x \mapsto e^{-x}\exp\left(-e^{-x}\right)$ on a qu'une densité de Z est

$$f : x \mapsto e^{-x}\exp\left(-e^{-x}\right).$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{U_n}(x) = F(x)$, on a que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable aléatoire S.

4 Ecricome 2017

Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Partie A : Etude de la matrice A

1. Calculer les matrices $(A-I)^2$ et $(A-I)^3$.
2. En déduire l'ensemble des valeurs propres de A ?
3. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

1. On pose $C := A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et calculons C^2 et C^3. On a

$$C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$C^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

2. On déduit de $(A-I)^3 = 0_3$ que le polynôme $(X-1)^3$ est un polynôme annulateur de A qui admet pour unique racine 1. On a donc $Sp(A) \subset \{1\}$. Vérifions que 1 est bien valeur propre.

   Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a

$$X \in E_1(A) \Leftrightarrow (A-I)X = 0_{3,1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2z = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X \in Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

   Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est non nul, on a qu'il s'agit d'un vecteur propre associée à 1 donc 1 est bien une valeur propre. On a donc

$$Sp(A) = \{1\}.$$

3. Comme 0 n'est pas une valeur propre de A, A est inversible.
   Supposons par l'absurde que A est diagonalisable, on a alors que A est semblable à la matrice I car elle admet uniquement 1 comme valeur propre. Il existe donc une matrice inversible P telle que $A = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$ ce qui est absurde donc A n'est pas diagonalisable.

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note pour tout $x \in]-1,1[$, $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

4. Justifier que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$, et déterminer les valeurs $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.
5. En utilisant la formule de Taylor-Young pour φ en 0 à l'ordre 2, déterminer un réel α non nul tel que
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$
6. On note $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2$ la fonction polynômiale de degré 2 ainsi obtenue. Développer $(P(x))^2$.
7. Soit $C = A - I$. En utilisant les résultats de la question 1, vérifier que $(P(C))^2 = A$.
Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.

4. On observe que $x \mapsto 1+x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-1,1[$. De plus pour tout $x \in]-1,1[$, on a $1+x \in]0,2[$ et comme la racine carrée est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $]0,2[\subset \mathbb{R}_+^*$, on a par composition que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$. On a de plus pour tout $x \in]-1,1[$
$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad \text{et} \quad \varphi''(x) = -\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1+x} = \frac{-1}{4}\frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}.$$
On a donc
$$\varphi'(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \varphi''(0) = -\frac{1}{4}.$$
5. Puisque φ est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0, on a par la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 que pour tout x au voisinage de 0 :
$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$
Le réel α recherché est donc $\alpha = -\frac{1}{8}$.
6. On a $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 = \frac{1}{8}(8+4x-x^2)$. On a
$$\begin{aligned} P(x)^2 &= \frac{1}{64}(8+4x-x^2)(8+4x-x^2) \\ &= \frac{1}{64}\left[64+32x-8x^2+32x+16x^2-4x^3-8x^2-4x^3+x^4\right] \\ &= \frac{64+64x-8x^3+x^4}{64} = 1 + x - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{64} \end{aligned}$$
7. Par les calculs de la partie A, on a que $C^3 = 0_3$ et donc $C^4 = 0_3$. On a donc par les calculs précédents
$$P(C)^2 = I + C - \frac{1}{8}C^3 + \frac{1}{64}C^4 = I + C = I + A - I = A.$$
Pour $M = P(C)$, on a donc $M^2 = A$ donc M est une solution de l'équation. On a
$$M = P(C) = \frac{1}{8}\left[8I + 4C - C^2\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4 & 4 & 8\\ -4 & 4 & 8\\ -12 & 12 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-6 & 6 & 0\\ -6 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right]$$
$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix}10 & -2 & 8\\ 2 & 6 & 8\\ -12 & 12 & 8\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}5 & -1 & 4\\ 1 & 3 & 4\\ -6 & 6 & 4\end{pmatrix}$$

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A.

Dans cette partie, on pose $T = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

8. Soient u, v et w les vecteurs définies par $\begin{cases} w = (1,0,1),\\ v = f(w) - w,\\ u = f(v) - v.\end{cases}$
   (a) Calculer les vecteurs v et u.
   (b) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.
   (d) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1}AP$.
9. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$. En déduire alors que N est de la forme
   $$N = \begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$$
   où a, b et c sont trois réels.
   (b) Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions : N_1 et N_2.
10. Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2.
11. L'ensemble E des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel ?

8. (a) On note W, V et U les matrices colonnes dans la base canoniques associées respectivement à w, v et u. On a
$$V = AW - W = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 2\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$$
et donc $v = (1, 1, -3)$.
De même, on a
$$U = AV - V = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 2\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-5\\-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-6\\0\end{pmatrix}$$

et donc $u=(-6,-6,0)$.

(b) Soit a,b et c trois réels tels que $au+bv+cw=0_{\mathbb{R}_3}$. On a donc

$$\begin{aligned}
&a(-6,-6,0)+b(1,1,-3)+c(1,0,1)=(0,0,0)\\
\Leftrightarrow&(-6a+b+c,-6a+b,-3b+c)=(0,0,0)\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}-6a+\ \ b+c=0\\-6a+\ \ b\qquad=0\\\qquad-3b+c=0\end{cases}\\
\overset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{\Leftrightarrow}&\begin{cases}\qquad\qquad c=0\\-6a+\ \ b\qquad=0\\\qquad-3b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\qquad\qquad c=0\\-6a+\ \ b\qquad=0\\\qquad-3b\qquad=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow&a=b=c=0
\end{aligned}$$

On a donc que la famille (u,v,w) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ or il s'agit d'une famille de cardinal 3 dans un espace vectoriel de dimension 3 donc la liberté implique que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) On observe, par les calculs de la partie A que $u\in E_1(A)$ donc $f(u)=u$. De plus par définition de u,v et w, on a $f(v)=u+v$ et $f(w)=v+w$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est donc

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=T.$$

(d) Pour P la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$, on a par formule de changement de base $A=PTP^{-1}$ et donc $T=P^{-1}AP$.

9. (a) Soit $N=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$ tel que $N^2=T$. On a alors

$$NT=N.N^2=N^3=N^2N=TN.$$

De plus on a

$$\begin{aligned}
NT=TN\Leftrightarrow&\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\\
\Leftrightarrow&\begin{pmatrix}a&a+b&b+c\\d&d+e&e+f\\g&g+h&h+i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+d&b+e&c+f\\d+g&e+h&f+i\\g&h&i\end{pmatrix}\\
\Leftrightarrow&\begin{pmatrix}-d&a-e&b-f\\-g&d-h&e-i\\0&g&h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -d=0 \\ a-e=0 \\ b-f=0 \\ -g=0 \\ d-h=0 \\ e-i=0 \\ 0=0 \\ g=0 \\ h=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=g=h=0 \\ a=e \\ b=f \\ e=i \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} d=g=h=0 \\ a=e=i \\ b=f \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

On a donc bien que si $N^2 = T$ alors N est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

(b) Par ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} N^2 = T &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2+2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab = 1 \\ b^2+2ac = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2ab = 1 \\ b^2+2ac = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -1 \\ 2ab = 1 \\ b^2+2ac = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \\ b^2+2c = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{1}{2} \\ b^2-2c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{8} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{8} \end{cases} \end{aligned}$$

L'équation $N^2 = T$ admet donc uniquement deux solutions

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N_2 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -N_1.$$

10. On a par utilisation des questions précédentes que

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Leftrightarrow P^{-1}M^2P = P^{-1}AP \\ &\Leftrightarrow P^{-1}M^2P = T \text{ par la qestion 8.d} \\ &\Leftrightarrow (P^{-1}MP)^2 = T \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow P^{-1}MP \in \{N_1, N_2\} \text{ par la question 9.b}$$
$$\Leftrightarrow P^{-1}MP = N_1 \text{ ou } P^{-1}MP = N_2$$
$$\Leftrightarrow M = PN_1P^{-1} \text{ ou } M = PN_2P^{-1}$$

L'équation $M^2 = A$ admet donc deux uniques solutions qui sont PN_1P^{-1} et $PN_2P^{-1}(= -PN_1P^{-1})$.
Cela n'est pas demandé mais l'on peut déterminer les deux solutions. En effet comme les deux solutions sont opposées et que nous avons déterminer une solution particulière de l'équation dans la partie B, on en déduit que

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

sont les uniques solutions de l'équation.

11. Un espace vectoriel réel est infini ou réduit au singleton nul, or l'ensemble des solutions de l'équation étant de cardinal deux, il est impossible que E soit un espace vectoriel.
On aurai également pu dire que la matrice nulle n'est pas dans E car $0_3^2 \neq A$ donc E n'est pas un espace vectoriel.
De même, une autre possibilité est d'observer que la somme des deux solutions trouvés n'est pas solutions de l'équation donc l'ensemble E n'est pas stable par combinaison linéaire donc E n'est pas un espace vectoriel (cette argument fonctionne également avec un multiple d'une solution qui n'est pas solution de l'équation par exemple.)