ANNEE SCOLAIRE 2024/2025
Devoir surveillé sur table $n°4$

Date : 04/04/2025 Heure 13h30 Durée : 4h00

Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés.

Lycée Jean Jacques ROUSSEAU

Dans les questions faisant intervenir des instructions en langage Python, on prendra soin d'importer les bibliothèques nécessaires lors de leur première utilisation dans chaque exercice.

1 Ecricome 2018 (Extrait)

Un forain peut installer un jeu dans une fête foraine. Le jeu consiste à lancer deux fois une pièce et le joueur gagne :

— rien si il obtient 0 pile,

— perd 10 euros si il obtient 1 pile,

— gagne 20 euros si il obtient 2 piles.

La pièce est truquée avec une probabilité $p = \frac{1}{4}$ d'obtenir pile.
Le forain estime que 200 clients participe à son jeu par jour. Il souhaite être certain, avant de s'installer dans cette fête forain, qu'il gagnera plus de 100 euros par jour avec un risque d'erreur inférieur à 10%.
On note pour tout entier i compris entre 1 et 200, G_i le gain algébrique du i-ème joueur.
On note aussi J la variable aléatoire égale au gain du forain sur toute la journée.

1. Pour tout entier $i \in [\![1, 200]\!]$, donner la loi de G_i, et calculer son espérance et sa variance.
2. Exprimer la variable aléatoire J en fonction des variables aléatoires G_i.
   Démontrer alors que $\mathbb{E}(J) = 500$ et que $V(J) = 11250$.
3. Justifier que $\mathbb{P}(J \leq 100) \leq \mathbb{P}(|J - 500| \geq 400)$.
4. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, puis montrer que
$$\mathbb{P}(J \leq 100) \leq \frac{9}{128}.$$
5. Compte tenu de ses exigences de rentabilité, le forain peut-il installer son stand ?

Remarque : Il s'agit ici d'une sous partie IV d'un problème, les trois précédentes ont étaient traitées lors du second concours blancs l'année dernière.

2 Ecricome 2020

Soit a un réel strictement positif.

1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose
$$I_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt.$$
   Montrer que l'intégrale $I_n(a)$ converge et vaut $\frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < a, \\ \frac{3a^3}{t^4} \text{ si } t \geq a. \end{cases}$$

   (a) Démontrer que f est bien une densité de probabilité. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

   (b) Donner la fonction de répartition de X.

   (c) Démontrer que X admet une espérance et calculer cette espérance.

   (d) Démontrer que X admet une variance et que celle-ci vaut $\frac{3a^2}{4}$.

3. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1]$. On pose $Y = \frac{a}{U^{\frac{1}{3}}}$.

   (a) Déterminer $Y(\Omega)$.

   (b) Déterminer la fonction de répartition de Y et vérifier que Y et X suivent la même loi.

   (c) Écrire une fonction en langage Python nommé simulX prenant en argument a, m et n où a est un réel strictement positif et m et n sont deux entiers naturels non nuls et qui renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient est un réel choisi de façon aléatoire en suivant la loi de X. Ces réels seront choisis de façon indépendante.
   On précise que la commande random((m,n)) de la bibliothèque numpy.random renvoie une matrice à m lignes et n colonnes où chaque coefficients de la matrice est une simulation indépendante d'une loi uniforme sur $[0, 1[$.

4. (a) Calculer $\mathbb{P}(X > 2a)$.

   (b) Calculer $\mathbb{P}_{X>2a}(X > 6a)$.

   (c) On suppose que la fonction Python de la question 3 a été programmée correctement et compilée. Compléter le script ci-dessous afin qu'il renvoie une valeur permettant de vérifier le résultat de la question précédente.

```
a = 10
N = 100000
s1 = 0
s2 = 0
X = simulX(a,1,N)
for k in range(1,N+1) :
        if ·········
                s1 = s1 + 1
                if X[0,k]>6*a :
                        ·········
if s1 > 0 :
        print(·········)
```

On cherche dans la suite de l'exercice à estimer le paramètre a.
Soit n un entier naturel non nul, et $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoire indépendantes et suivant toutes la même loi que X.

5. On pose $V_n = \frac{2}{3n} \sum_{k=1}^{n} X_k$.

   (a) Montrer que V_n est un estimateur sans biais pour le paramètre a.

(b) Calculer son risque quadratique et vérifier que celui-ci vaut $\frac{a^2}{3n}$.

6. On pose $W_n = \min(X_1, ..., X_n)$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de W_n et vérifier que W_n est bien une variable aléatoire à densité.
   (b) Montrer que W_n admet pour densité la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} & \text{si } t \geq a. \end{cases}$$

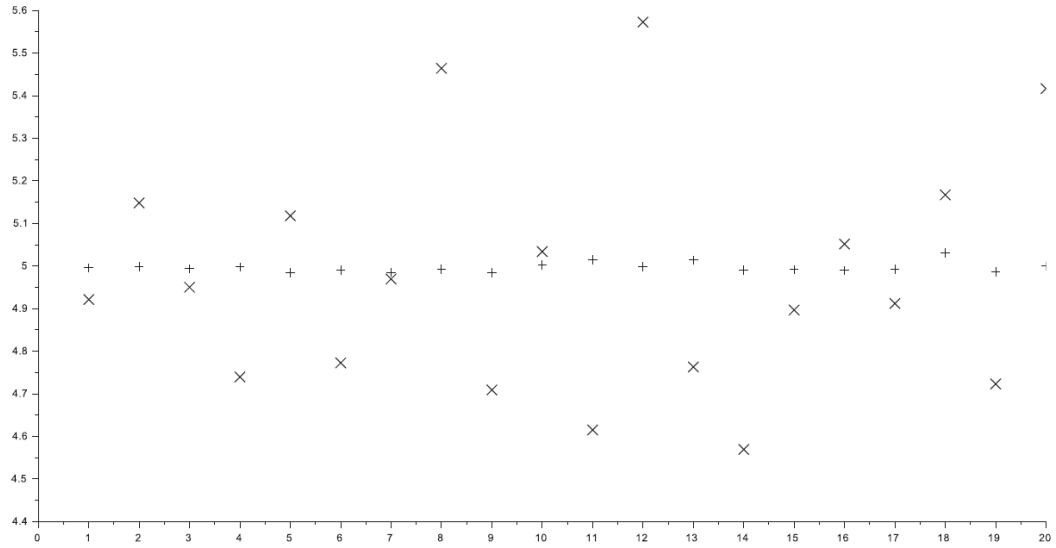
   (c) Démontrer que W_n admet une espérance et calculer cette espérance. Déterminer alors l'unique réel λ_n dépendant de n tel que $\lambda_n W_n$ est un estimateur sans biais pour le paramètre a.
   (d) Calculer le risque quadratique de $\lambda_n W_n$ et vérifier que celui-ci vaut $\frac{a^2}{3n(3n-2)}$.

7. (a) Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle réalise m simulations de la variable aléatoire V_n et renvoie les résultats obtenus sous forme d'une matrice ligne à m éléments :

```
.........
def simulV(a,m,n) :
        X = simulX(a,m,n)
        V = np.zeros((1,m))
        for k in ......
                V[0,k] = .........
        return V
```

   Pour la suite, on prend $n = 100$ et on suppose que l'on dispose d'une fonction similaire simulW permettant d'obtenir m simulations de la variable aléatoire $\lambda_n W_n$.

   (b) Écrire les lignes de codes permettant ayant permis d'obtenir le graphique suivant :



On justifiera en amont le choix des paramètres ainsi que l'attribution des symboles $+$ et $\times$.

3 EMLyon 2016

Partie I : Étude d'une variable aléatoire

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $f(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$.

1. Vérifier que la fonction f est paire.
2. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.
   Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.
3. Déterminer la fonction de répartition de X.
4. (a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge.
   (b) En utilisant l'imparité de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto tf(t)$, montrer que X admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(X) = 0$.

Partie II : Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \ln(1 + e^x)$.

5. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.
6. Exprimer, pour tout y de I, $\varphi^{-1}(y)$.
   On définit la variable aléatoire réelle Y définie par : $Y = \varphi(X)$.
7. Justifier $\mathbb{P}(Y \leq 0) = 0$.
8. Déterminer la fonction de répartition de Y.
9. Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

Partie III : Étude d'une convergence en loi

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f, où f a été définie dans la partie I.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, ..., X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

10. (a) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n.
    (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(U_n \leq x) = \left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}$.
11. En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

4 Ecricome 2017

Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Partie A : Etude de la matrice A

1. Calculer les matrices $(A - I)^2$ et $(A - I)^3$.
2. En déduire l'ensemble des valeurs propres de A ?
3. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note pour tout $x \in]-1, 1[$, $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

4. Justifier que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1, 1[$, et déterminer les valeurs $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.
5. En utilisant la formule de Taylor-Young pour φ en 0 à l'ordre 2, déterminer un réel α non nul tel que

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

6. On note $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2$ la fonction polynômiale de degré 2 ainsi obtenue. Développer $(P(x))^2$.
7. Soit $C = A - I$. En utilisant les résultats de la question 1, vérifier que $(P(C))^2 = A$.
   Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A.
Dans cette partie, on pose $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Soient u, v et w les vecteurs définies par $\begin{cases} w = (1, 0, 1), \\ v = f(w) - w, \\ u = f(v) - v. \end{cases}$
   (a) Calculer les vecteurs v et u.
   (b) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.

(d) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1}AP$.

9. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$. En déduire alors que N est de la forme

   $$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

   où a, b et c sont trois réels.

   (b) Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions : N_1 et N_2.

10. Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2.

11. L'ensemble E des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel ?