

# Programme de colle 24

## Semaine du 27 avril 2026

### Chapitre 21 : Séries

#### ➤ Cours à connaître

- ✓ Définition série, somme partielle
- ✓ Nature d'une série : converger et diverger.
- ✓ Connaître la propriété de linéarité des séries convergentes.
- ✓ Condition nécessaire de convergence :  $(u_n)$  doit converger vers 0 + contraposée et divergence grossière.
- ✓ Convergence d'une série à termes positifs + théorème de comparaison pour les séries.
- ✓ Définition convergence absolue + CVA  $\implies$  CV
- ✓ Séries usuelles : géométriques, exponentielle et Riemann (formules à connaître par coeur)

#### ➤ Exercices type

- ✓ Déterminer si une série  $\sum u_k$  converge :
  - Utiliser la divergence grossière
  - Étudier la suite des sommes partielles  $\sum_{k=0}^n u_k$  et déterminer sa limite
  - Se ramener aux séries de référence (géométrique et dérivées, exponentielle Riemann). Faire un changement d'indice et utiliser la relation de Chasles si besoin.
  - Connaître l'astuce  $k^2 = k(k-1) + k$  pour les séries géométriques et dérivées.
  - Penser au théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.
  - Utiliser la convergence absolue (peu utilisé en cours, nécessitera des indications)
- ✓ Exercice guidé : Étudier une série à la place d'une suite. Pour étudier une suite  $(u_n)$ , il arrive qu'il soit plus simple d'étudier la série de terme général  $u_{n+1} - u_n$ . En effet, on a l'égalité

$$u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k).$$

- ✓ Exercice plus long et guidé de manipulation de suites et séries

### Chapitre 22 : Dérivation

#### ➤ Cours à connaître

- ✓ Définition de dérivabilité en un point avec la limite du taux d'accroissement  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$
- ✓ Dérivable implique continue + contraposée.
- ✓ Limites des 3 taux d'accroissement usuels
- ✓ Dérivée à droite et à gauche

- ✓ Interprétation graphique : tangente, tangente verticale et point anguleux.
- ✓ Fonction dérivée
- ✓ Connaître les dérivées usuelles (avec  $x$  et avec  $u$ ).
- ✓ Dérivée et sens de variations.
- ✓ Inégalité des accroissements finis

➤ **Exercices type**

- ✓ Déterminer le domaine de dérivabilité d'une fonction.
- ✓ Dériver des fonctions.
- ✓ Étudier la dérivabilité en un point.
- ✓ Étudier les variations d'une fonction.
- ✓ Exercice plus long et guidé : Utiliser l'inégalité des accroissements finis (avec application aux suites.)

## Python : Fonctions et suites

**En question de cours il faut savoir :**

- Écrire une fonction Python renvoyant l'image d'un nombre  $x$  par une fonction  $f$  donnée.
- Écrire une fonction Python renvoyant le  $n^e$  terme d'une suite définie explicitement ou par une relation de récurrence .

**En exercices de programmation on peut :**

- Coupler les deux méthodes, par exemple définir une fonction  $f(x) = x^2 - x$  puis la suite définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$
- Écrire une fonction en Python qui calcule le  $n^e$  terme d'une suite (définie explicitement ou par une relation de récurrence) ; puis une fonction de recherche de seuil (trouver le premier entier  $n$  tel que  $u_n > 1000$  par exemple)
- Écrire une fonction qui prend un entier  $n$  en paramètre et renvoie le terme  $u_n$  d'une suite définie par une relation plus complexe :
  - relation de récurrence d'ordre 2, par exemple  $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$
  - une relation mêlant le terme et l'indice, par exemple  $u_{n+1} = 3u_n + n^2$
- Une fonction définie par morceaux, par exemple  $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{x^2+1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$