

## EXERCICE 1

1. D'après l'énoncé,  $X$  est une variable aléatoire prenant des valeurs dans l'ensemble  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , choisies avec équiprobabilité.

$$\text{Ainsi, } X \text{ suit la loi uniforme sur } \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } E(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2-1}{12} .$$

2. D'après l'énoncé, pour tout entier  $j$  compris entre 1 et  $n$ , la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = j]$  est la loi uniforme sur  $\llbracket 1, j \rrbracket$ . Ainsi, pour tout  $(j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  :

- Si  $k > j$ ,

$$\mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) = \mathbb{P}(X = j)P_{[X=j]}(Y = k) = 0 .$$

- Si  $k \leq j$ ,

$$\mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) = \mathbb{P}(X = j)P_{[X=j]}(Y = k) = \frac{1}{n} \frac{1}{j} .$$

$$\text{Ainsi : } \forall (j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) = \begin{cases} \frac{1}{nj} & \text{si } k \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Remarquons que  $X(\Omega) \times Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , donc  $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Or, } \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{1}{nj} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{1}{j} . \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{1}{j} = 1, \text{ autrement dit : } \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{1}{j} = n .$$

4. Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements  $\{[X = j] : j \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ ,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) = \sum_{j=k}^n \frac{1}{nj} .$$

$$\text{Ainsi, pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket : \quad \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^n \frac{1}{j} .$$

5. (a)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{k}{j} &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \frac{k}{j} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j k \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \frac{j(j+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j+1) . \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{k}{j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j+1) .$$

- (b) L'ensemble  $Y(\Omega)$  est fini, donc la variable aléatoire  $Y$  admet une espérance.  
De plus, d'après les deux questions précédentes,

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \sum_{k=1}^n kP(Y = k) \\
 &= \sum_{k=1}^n k \sum_{j=k}^n \frac{1}{nj} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{k}{j} \\
 &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j+1) \\
 &= \frac{1}{2n} \left( \sum_{j=1}^n j + \sum_{j=1}^n 1 \right) \\
 &= \frac{1}{2n} \left( \frac{n(n+1)}{2} + n \right) \\
 &= \frac{n+3}{4}.
 \end{aligned}$$

Finalement,  $E(Y) = \frac{n+3}{4}$ .

6. (a) Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  prenant un nombre fini de valeurs,  $XY$  prend également un nombre fini de valeurs et  $XY$  admet une espérance. De plus, d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
 E(XY) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n jkP([X = j] \cap [Y = k]) \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j jk \frac{1}{nj} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j k \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{2}.
 \end{aligned}$$

Donc  $E(XY) = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n j(j+1)$ .

- (b) En poursuivant le calcul de la question précédente :

$$\begin{aligned}
 E(XY) &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n j(j+1) \\
 &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n (j^2 + j) \\
 &= \frac{1}{2n} \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
 &= \frac{n+1}{12} (2n+4) \\
 &= \frac{(n+1)(n+2)}{6}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Finalement, } E(XY) = \frac{(n+1)(n+2)}{6}.$$

(c) D'après la formule de Huygens,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n+1}{2} \times \frac{n+3}{4} \\ &= \frac{n+1}{24} (4(n+2) - 3(n+3)) \\ &= \frac{(n+1)(n-1)}{24} \\ &= \frac{n^2 - 1}{24}. \end{aligned}$$

Donc la covariance du couple  $(X, Y)$  est égale à  $\frac{n^2 - 1}{24}$ .

7. Par hypothèse,  $n \geq 2$  donc  $\text{Cov}(X, Y) = \frac{n^2 - 1}{24} \neq 0$ , donc les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

8. (a)

```
import numpy.random as rd

def simulXY(n):
    x = rd.randint(1, n+1)
    y = rd.randint(1, x+1)
    return x, y
```

(b)  $M[0, 1]$  correspond à la covariance empirique de la série statistique  $(x, y)$ , et  $M[0, 0]$  et  $M[1, 1]$  correspondent respectivement aux variances empiriques de  $x$  et de  $y$ .

Ainsi, le résultat renvoyé correspond au coefficient de corrélation linéaire de la série statistique  $(x, y)$ .

(c) On sait que :

- la droite d'ajustement affine doit être une droite (ce qui exclut le tracé n° 1),
- la droite d'ajustement affine passe par le point moyen du nuage (ce qui exclut le tracé n° 3),
- la droite d'ajustement affine doit être croissante lorsque la covariance est positive, ce qui est le cas du couple  $(X, Y)$  (ce qui exclut le tracé n° 4).

Ainsi, par élimination, le tracé correct est le tracé n° 2.

9. (a) L'événement  $A_n$  est égal à :  $A_n = [X = Y]$ .

(b) D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements  $\{[X = j] : j \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}(X = Y) \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbb{P}([X = j] \cap [X = Y]) \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = j]) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{nj}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

(c) Soit  $j$  un entier naturel non nul. La fonction  $\ln$  est dérivable sur  $[j, j + 1]$ , et pour tout  $t \in [j, j + 1]$ ,

$$\frac{1}{j+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{j}.$$

Ainsi, par croissance de l'intégration sur l'intervalle  $[j, j + 1]$

$$\int_j^{j+1} \frac{1}{j+1} dt \leq \int_j^{j+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_j^{j+1} \frac{1}{j} dt$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{j+1} \leq \ln(j+1) - \ln(j) \leq \frac{1}{j}.$$

(d)  $\diamond$  D'après la question précédente,  $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\ln(j+1) - \ln(j) \leq \frac{1}{j}$ .

En sommant, 
$$\sum_{j=1}^n (\ln(j+1) - \ln(j)) \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

Or, en reconnaissant une somme télescopique, 
$$\sum_{j=1}^n (\ln(j+1) - \ln(j)) = \sum_{j=1}^n \ln(j+1) - \sum_{j=1}^n \ln(j) = \ln(n+1).$$

Donc  $\ln(n+1) \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$  et en divisant par  $n$ ,  $\frac{\ln(n+1)}{n} \leq \mathbb{P}(A_n)$ .

$\diamond$  D'après la question précédente,  $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\frac{1}{j+1} \leq \ln(j+1) - \ln(j)$ .

En sommant de 1 à  $n-1$ , 
$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j+1} \leq \sum_{j=1}^{n-1} (\ln(j+1) - \ln(j)).$$

c'est-à-dire, en reconnaissant encore une somme télescopique, 
$$\sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \leq \ln(n).$$

Or  $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n \frac{1}{j}$ . D'où  $\mathbb{P}(A_n) \leq \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}$ .

Enfin, 
$$\frac{\ln(n+1)}{n} \leq \mathbb{P}(A_n) \leq \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}.$$

(e)  $\diamond$  En divisant par  $\frac{\ln(n)}{n}$  dans l'encadrement précédent,

$$\frac{\ln(n+1)}{n} \times \frac{n}{\ln(n)} \leq \frac{\mathbb{P}(A_n)}{\frac{\ln(n)}{n}} \leq \left( \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n} \right) \frac{n}{\ln(n)},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{\mathbb{P}(A_n)}{\frac{\ln(n)}{n}} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

$\diamond$  Or, 
$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln(n)}.$$

donc 
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1.$$

$\diamond$  D'autre part, 
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{\ln(n)} \right) = 1.$$

Ainsi, par encadrement, 
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{P}(A_n)}{\frac{\ln(n)}{n}} = 1, \quad \text{autrement dit, } \mathbb{P}(A_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}.$$

10. (a)

```
SELECT COUNT(*)
FROM adherent
WHERE id_2025 = id_2026
```

(b) Cette requête renvoie

une table associant pour chaque numéro d'adhérent, le nom de la compagnie que cet adhérent a choisi en 2026 .

(c)

```
SELECT compagnie, AVG(note)
FROM avis
GROUP BY compagnie
```

(d)

```
SELECT compagnie
FROM moyenne
ORDER BY note DESC
```

## EXERCICE 2

### Partie I

1. La fonction  $f$  est définie en tout point  $x$  tel que  $\frac{1}{1-x} > 0$ , c'est-à-dire tel que  $1-x > 0$ , c'est-à-dire tel que  $x < 1$ .

Ainsi,  $f$  est définie sur  $] -\infty, 1[$ .

2. Pour tout  $x \in ] -\infty, 1[$ ,  $f(x) = -\ln(1-x)$ .

Or,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x) = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\ln(X) = -\infty$

D'autre part,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) = 0^+$  donc  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} -\ln(h) = +\infty$ .

Finalement,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ .

3. La fonction  $f$  est dérivable sur  $] -\infty, 1[$  comme composée de fonctions usuelles dérivables et, pour tout réel  $x < 1$ ,

$$f'(x) = \frac{1}{1-x}.$$

En particulier,  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in ] -\infty, 1[$ .

Ainsi, la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $] -\infty, 1[$ .

4. (a) Rappelons que  $\ln(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$ .

En posant  $h = -x$  qui tend bien vers 0 lorsque  $x$  tend vers 0,

$$\begin{aligned} f(x) &= -\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\left( (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

Ainsi,  $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ .

(b) On en déduit que la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 0 a pour équation  $y = x$ .

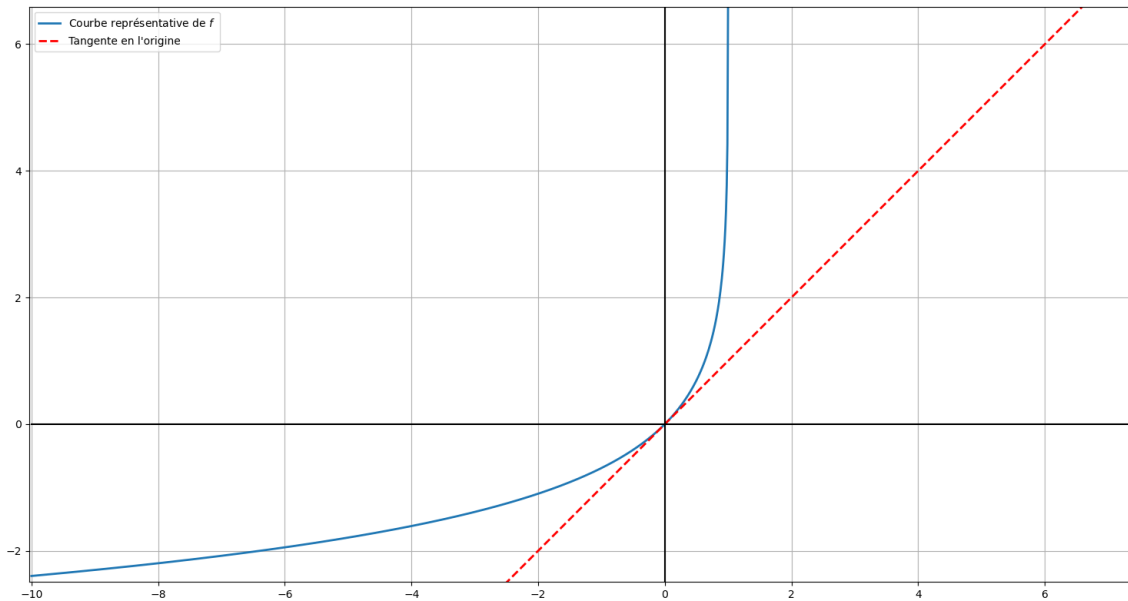
De plus, on a

$$f(x) - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

donc  $f(x) - x$  est positif au voisinage de 0.

Ainsi, la courbe représentative de  $f$  est au-dessus de sa tangente au voisinage du point d'abscisse 0.

5.



**Partie II**

6. (a) D'après le cours, la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$  diverge comme série de Riemann d'exposant  $1 \leq 1$ .

(b) Pour tout entier  $n$  strictement positif,

$$S_{n+1}(1) - S_n(1) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} \geq 0,$$

Donc la suite  $(S_n(1))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante.

(c) D'après le théorème de la limite monotone, une suite croissante et divergente tend vers  $+\infty$ .

Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(1) = +\infty$ .

7. Soit  $x \in ]-1, 1[$ . Pour tout entier  $k$  strictement positif,  $0 \leq \left| \frac{x^k}{k} \right| \leq |x|^k$ , or la série géométrique  $\sum_{k \geq 1} |x|^k$  converge,

donc par comparaison des séries à termes positifs, la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$  converge absolument.

8. (a)  $(S_{2n}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante. En effet, pour tout entier  $n$  strictement positif,

$$\begin{aligned} S_{2n+2}(-1) - S_{2n}(-1) &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} \\ &= -\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

car  $2n+2 \geq 2n+1$  donc  $\frac{1}{2n+2} \leq \frac{1}{2n+1}$ .

$(S_{2n+1}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante. En effet, pour tout entier  $n$  strictement positif,

$$\begin{aligned} S_{2n+3}(-1) - S_{2n+1}(-1) &= \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} \\ &= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

car  $2n+3 \geq 2n+2$  donc  $\frac{1}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+2}$ .

$(S_{2n+1}(-1) - S_{2n}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0. En effet, pour tout entier  $n$  strictement positif,

$$S_{2n+1}(-1) - S_{2n}(-1) = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = -\frac{1}{2n+1}$$

donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n+1}(-1) - S_{2n}(-1)) = 0$ .

Finalement, les suites  $(S_{2n}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(S_{2n+1}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont adjacentes.

- (b) D'après la question précédente que les suites  $(S_{2n}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(S_{2n+1}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont convergentes et qu'elles possèdent la même limite, puis que la suite  $(S_n(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente.
- (c) Les suites  $(S_{2n}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(S_{2n+1}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$  étant adjacentes, de limite  $-\ln(2)$  et respectivement décroissante et croissante, pour tout entier  $n$  strictement positif,

$$S_{2n+1}(-1) \leq -\ln(2) \leq S_{2n}(-1).$$

Ainsi,  $S_{2n}(-1) + \ln(2) \geq 0$ , et d'autre part,  $\ln(2) \leq -S_{2n+1}(-1)$ , donc :

$$0 \leq S_{2n}(-1) + \ln(2) \leq S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1).$$

Autrement dit,  $|\ln(2) + S_{2n}(-1)| \leq S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1)$ .

- (d) Soit  $p$  un entier strictement positif. En procédant comme à la question précédente, on a  $\ln(2) + S_{2p+1}(-1) \leq 0$  et  $-\ln(2) \leq S_{2p}(-1)$ , donc :

$$\begin{aligned} |\ln(2) + S_{2p+1}(-1)| &= -\ln(2) - S_{2p+1}(-1) \\ &\leq S_{2p}(-1) - S_{2p+1}(-1). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier  $n \geq 2$  :

- Si  $n$  est pair, il existe  $p \geq 1$  tel que  $n = 2p$  et alors, d'après la question précédente,

$$|\ln(2) + S_n(-1)| \leq S_{2p}(-1) - S_{2p+1}(-1) = \frac{1}{2p+1} \leq \frac{1}{2p} = \frac{1}{n}.$$

- Si  $n$  est impair, il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n = 2p+1$  et alors, d'après l'inégalité que l'on vient de montrer,

$$|\ln(2) + S_n(-1)| \leq S_{2p}(-1) - S_{2p+1}(-1) = \frac{1}{2p+1} = \frac{1}{n}.$$

Enfin, pour  $n = 1$  car  $|\ln(2) + S_1(-1)| = |\ln 2 - 1| \leq 1$ .

Finalement, pour tout entier  $n$  strictement positif,  $|\ln(2) + S_n(-1)| \leq \frac{1}{n}$ .

9. (a) Puisque  $x > 1$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{k} = +\infty$ .

Son terme général ne convergeant pas vers 0, la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$  diverge.

- (b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_{n+1}(x) - S_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \geq 0$  donc la suite  $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante et divergente, ainsi d'après le théorème de la limite monotone,  $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  tend vers  $+\infty$ .

Partie III

10. (a) Comme  $-1 < a < 1$ , donc  $\forall t \in [0, a]$ ,  $1 - t > 0$ .

Ainsi,  $\int_0^a \frac{1}{1-t} dt = \left[ -\ln|1-t| \right]_0^a = \left[ -\ln(1-t) \right]_0^a = f(a)$ . D'autre part,  $\int_0^a \frac{1}{(1-t)^2} dt = \left[ \frac{1}{1-t} \right]_0^a = \frac{1}{1-a} - 1 = \frac{a}{1-a}$ .

Donc  $\int_0^a \frac{1}{1-t} dt = f(a)$  et  $\int_0^a \frac{1}{(1-t)^2} dt = \frac{a}{1-a}$ .

(b)

$$\begin{aligned} R_1(a) &= \int_0^a \frac{a-t}{(1-t)^2} dt \\ &= \int_0^a \frac{a-1+1-t}{(1-t)^2} dt \\ &= (a-1) \int_0^a \frac{1}{(1-t)^2} dt + \int_0^a \frac{1}{1-t} dt \\ &= (a-1) \frac{a}{1-a} + f(a) \\ &= -a + f(a) \end{aligned}$$

Ainsi  $f(a) = a + R_1(a)$ .

11. Pour tout  $t \in [0, a]$ , on pose  $u(t) = -\frac{(a-t)^{n+1}}{n+1}$  (de sorte que  $u'(t) = (a-t)^n$ ) et  $v(t) = \frac{1}{(1-t)^{n+1}}$  (donc  $v'(t) = \frac{n+1}{(1-t)^{n+2}}$ ).

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, a]$ , donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} R_n(a) &= \left[ -\frac{(a-t)^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1-t)^{n+1}} \right]_0^a + \int_0^a \frac{(a-t)^{n+1}}{n+1} \frac{n+1}{(1-t)^{n+2}} dt \\ &= \frac{a^{n+1}}{n+1} + \int_0^a \frac{(a-t)^{n+1}}{(1-t)^{n+2}} dt. \end{aligned}$$

Autrement dit,  $R_n(a) = \frac{a^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}(a)$ .

12. On procède par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Initialisation.** Pour  $n = 1$ , on a, d'après la question 10b),

$$f(a) = a + R_1(a) = \sum_{k=1}^1 \frac{a^k}{k} + R_1(a) = S_1(a) + R_1(a).$$

La propriété souhaitée est donc vérifiée au rang  $n = 1$ .

**Hérédité.** Soit  $n$  un entier strictement positif. On suppose  $f(a) = S_n(a) + R_n(a)$ .

Alors, d'après la question précédente,

$$f(a) = S_n(a) + \frac{a^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}(a) = S_{n+1}(a) + R_{n+1}(a).$$

La propriété souhaitée est donc vérifiée au rang  $n + 1$ .

**Conclusion.** Par le principe de récurrence, pour tout entier  $n$  strictement positif,  $f(a) = S_n(a) + R_n(a)$ .

13. (a) Remarquons que pour tout  $t$  de  $[0, a]$ ,  $\frac{a-t}{1-t} = \frac{a-1}{1-t} + 1$ .

Or  $a - 1 < 0$ . Donc  $\varphi : t \mapsto \frac{a-t}{1-t}$  est décroissance sur  $[0, a]$ .

Or  $\varphi(0) = a$  et  $\varphi(a) = 0$ .

Finalement  $\forall t \in [0, a]$ ,  $0 \leq \frac{a-t}{1-t} \leq a$ .

(b) Pour tout  $t \in [0, a]$ ,  $a - t \geq 0$  et  $1 - t \geq 0$  donc  $\frac{(a-t)^n}{(1-t)^{n+1}} \geq 0$ .

D'autre part, pour tout  $t \in [0, a]$ , en utilisant le résultat de la question précédente,

$$\begin{aligned} \frac{(a-t)^n}{(1-t)^{n+1}} &= \frac{1}{1-t} \left( \frac{a-t}{1-t} \right)^n \\ &\leq \frac{1}{1-t} a^n \\ &\leq \frac{a^n}{1-a}, \end{aligned}$$

car  $t \leq a$ , donc  $1 - a \leq 1 - t$ , donc par décroissance de l'inverse,  $\frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-a}$ .

Finalement, pour tout  $t \in [0, a]$ ,  $0 \leq \frac{(a-t)^n}{(1-t)^{n+1}} \leq \frac{a^n}{1-a}$

d'où, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq R_n(a) \leq \int_0^a \frac{a^n}{1-a} dt,$$

c'est-à-dire  $0 \leq R_n(a) \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}$ .

(c) D'après l'énoncé,  $a \in [0, 1[$ , donc  $\left(\frac{a^{n+1}}{1-a}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite géométrique qui converge vers 0.

Ainsi, par encadrement et d'après le résultat de la question précédente, la suite  $(R_n(a))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0. Or, d'après la question 12,  $f(a) = S_n(a) + R_n(a)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$ .

Ainsi, par passage à la limite,  $f(a) = S(a)$ .

14. (a) Soit  $n$  un entier naturel non nul. On applique le résultat de la question 13b avec  $a = \frac{1}{2}$ , ce qui donne :

$$0 \leq R_n\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Autrement dit, puisque  $f\left(\frac{1}{2}\right) = S_n\left(\frac{1}{2}\right) + R_n\left(\frac{1}{2}\right)$  d'après la question 12 :

$$0 \leq f\left(\frac{1}{2}\right) - S_n\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Or par définition  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = \ln(2)$ , et  $S_n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k}$ .

Ainsi,  $\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k} \right| \leq \frac{1}{2^n}$ .

(b) On calcule les valeurs successives de  $S_n\left(\frac{1}{2}\right)$  jusqu'à ce que  $\frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$ .

```
def Val(eps):
    somme = 0
    n = 0
    while 1 / (2 ** n) > eps:
        n += 1
        somme += 1 / (n * 2 ** n)
    return somme
```

(c) La suite  $\left(S_n\left(\frac{1}{2}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs. Il s'agit donc d'une suite croissante et convergente.

La suite  $\left(S_n\left(\frac{1}{2}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est donc représentée par des cercles sur la figure .

La suite  $(-S_n(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite dont les suites extraites de rangs pairs et impairs sont adjacentes.

La suite  $(-S_n(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est donc représentée par des croix sur la figure .

### EXERCICE 3

#### Partie I

- En sommant les deux premières lignes de  $\mathcal{C}$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x'(t) + y'(t) = 0$ , c'est-à-dire  $s'(t) = 0$ .
- La fonction  $s$  est donc constante sur l'intervalle  $\mathbb{R}$ . Or  $s(0) = x(0) + y(0) = 2$ , donc, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x(t) + y(t) = 2$ , c'est-à-dire  $y(t) = 2 - x(t)$ .
- D'après les questions précédentes, si  $x$  et  $y$  sont solutions de  $(\mathcal{C})$ , alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x'(t) = 2$ , donc il existe un réel  $\lambda$  tel que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x(t) = 2t + \lambda$ . De plus,  $x(0) = 1$  donc  $\lambda = 1$ , ainsi  $x(t) = 2t + 1$ .  
D'autre part,  $y(t) = 2 - x(t)$ , donc  $y(t) = 1 - 2t$ .  
Réciproquement, on vérifie que les fonctions  $x$  et  $y$  définies pour tout  $t$  réel par  $x(t) = 2t + 1$  et  $y(t) = 1 - 2t$  vérifient bien  $(\mathcal{C})$  : ce sont des fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  car polynomiales et, pour tout réel  $t$ ,  $x'(t) = 2 = x(t) + y(t)$ ,  $y'(t) = -2 = -x(t) - y(t)$ ,  $x(0) = 1$  et  $y(0) = 1$ .  
Finalement les solutions du problème  $(\mathcal{C})$  sont les fonctions  $x : t \mapsto 2t + 1$  et  $y : t \mapsto 1 - 2t$ .

#### Partie II

- La matrice  $P$  est inversible car son déterminant est égal à  $1 \neq 0$ . On vérifie que la matrice  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  vérifie  $PB = BP = I_2$ .  
Ainsi,  $P$  est inversible et  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .
- Soit  $\lambda$  un réel.  
 $\lambda$  est valeur propre de  $A$  si et seulement si  $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -1 & -1 - \lambda \end{pmatrix}$  n'est pas inversible, si et seulement si  $(1 - \lambda)(-1 - \lambda) + 1 = 0$ .  
si et seulement si  $\lambda^2 = 0$ , si et seulement si  $\lambda = 0$ .  
Ainsi, l'unique valeur propre de  $A$  est 0.
- On vérifie par l'absurde que  $A$  n'est pas diagonalisable. Supposons  $A$  diagonalisable. Alors, d'après la question précédente, il existe une matrice inversible  $Q$  telle que  $A = QDQ^{-1}$  avec  $D = 0_2$ , donc  $A = 0_2$ , ce qui contredit la définition de  $A$ .  
La matrice  $A$  n'est donc pas diagonalisable.
- Notons  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Ces vecteurs étant les colonnes de la matrice inversible  $P$ , ils forment une base de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  et  $P$  est la matrice de passage de la base canonique à la base  $(X_1, X_2)$ .  
Alors  $AX_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $AX_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = X_1$   
donc l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  canoniquement associé à  $A$  est représenté par  $J$  dans la base  $(X_1, X_2)$ .  
Ainsi, par formule de changement de base,  $J = P^{-1}AP$ .
- Les états d'équilibre de ce système différentiel sont ses solutions constantes.  
Soient  $C$  et  $K$  deux réels et  $x, y$  deux solutions du système  $(\mathcal{S})$  constantes égales à  $C$  et  $K$  respectivement.  
Alors  $x' = y' = 0$  donc le système se réécrit  $C + K = 0$ , c'est-à-dire  $X(t) = \begin{pmatrix} C \\ -C \end{pmatrix}$ , où  $C \in \mathbb{R}$ .  
Les états d'équilibre du système  $(\mathcal{S})$  sont donc les fonctions  $x$  et  $y$  telles que  $X$  appartient à  $\text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ .

9. Soient  $x$  et  $y$  deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Les fonctions  $x$  et  $y$  sont solutions de  $(\mathcal{S})$  si et seulement si, pour tout réel  $t$ ,  $X'(t) = AX(t)$ .

Or  $J = P^{-1}AP$ , donc  $A = PJP^{-1}$ , et pour tout réel  $t$ ,

$$\begin{aligned} X'(t) = AX(t) &\iff X'(t) = PJP^{-1}X(t) \\ &\iff P^{-1}X'(t) = JP^{-1}X(t) \\ &\iff Y'(t) = JY(t), \end{aligned}$$

où par linéarité de la dérivation,  $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$ .

Finalemnt,  $x$  et  $y$  sont solutions de  $(\mathcal{S})$  si et seulement si, pour tout réel  $t$ ,  $Y'(t) = JY(t)$ .

10. Pour toutes fonctions dérivables  $u$  et  $v$  sur  $\mathbb{R}$  et tout réel  $t$ ,

$$Y'(t) = JY(t) \iff \begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = 0 \end{cases}$$

Deux fonctions  $u$  et  $v$  sont donc solutions du système différentiel  $Y'(t) = JY(t)$  si et seulement s'il existe deux réels  $c$  et  $\lambda$  tels que, pour tout réel  $t$ ,

$$\begin{cases} v(t) = c \\ u(t) = ct + \lambda \end{cases}$$

Les solutions du système  $Y'(t) = JY(t)$  sont donc les fonctions de la forme  $u : t \mapsto ct + \lambda$ ,  $v : t \mapsto c$ , où  $(c, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ .

11. Soient  $x$  et  $y$  deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$x$  et  $y$  sont solutions de  $(\mathcal{S})$  si et seulement si  $P^{-1}X$  est solution de  $Y' = JY$ ,

si et seulement si  $\exists(c, \lambda) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} ct + \lambda \\ c \end{pmatrix}$

si et seulement si  $\exists(c, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \forall t \in \mathbb{R}$ ,  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} ct + \lambda \\ c \end{pmatrix}$

si et seulement si  $\exists(c, \lambda) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}$ ,  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} ct + \lambda \\ c \end{pmatrix}$

si et seulement si  $\exists(c, \lambda) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}$ ,  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct + \lambda \\ c(1-t) - \lambda \end{pmatrix}$

Ainsi, les solutions de  $(\mathcal{S})$  sont donc les fonctions de la forme  $x : t \mapsto ct + \lambda$ ,  $y : t \mapsto c(1-t) - \lambda$ , où  $(c, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ .

### Partie III

12.

```
import numpy as np

def Nil(M):
    n, _ = M.shape
    Mp = np.eye(n)
    for p in range(1, n + 1):
        Mp = np.dot(Mp, M)
        if (Mp == np.zeros(n,n)).all():
            return p
    return 0
```

13. Par hypothèse,  $N^p = 0_n$ , donc  $x^p$  est un polynôme annulateur de  $N$ .

Ainsi, les valeurs propres de  $N$  sont à chercher parmi les racines de  $x^p$ , autrement dit 0 est la seule valeur propre possible de  $N$ .

De plus, supposons que 0 n'est pas valeur propre de  $N$ ; alors  $N$  est inversible, donc  $N^p$  est inversible, ce qui contredit  $N^p = 0_n$ .

Finalemnt, l'unique valeur propre de  $N$  est 0.

14. Supposons  $N$  diagonalisable. Alors, d'après la question précédente, il existe une matrice inversible  $Q$  telle que  $A = QDQ^{-1}$  avec  $D = 0_2$ , donc  $N = 0_2$ , ce qui contredit la définition de  $N$ .

La matrice  $N$  n'est donc pas diagonalisable.

15. Par linéarité de la dérivation, pour tout réel  $t$ ,  $X'(t) = B'(t)X_0$ , et

$$\begin{aligned} B'(t) &= \sum_{k=1}^{p-1} \frac{kt^{k-1}}{k!} N^k \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^k. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel  $t$ ,  $X'(t) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^k X_0$ .

16. En poursuivant le calcul de la question précédente, et en utilisant que  $N^p = 0_n$ , on a pour tout réel  $t$ ,

$$\begin{aligned} X'(t) &= \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^k X_0 \\ &= \sum_{k=1}^p \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^k X_0 \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N^{k+1} X_0 \\ &= N \left( \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N^k \right) X_0 \\ &= NB(t)X_0 \\ &= NX(t). \end{aligned}$$

De plus, puisque  $0^k = 1$  si et seulement si  $k = 0$  et  $0^k = 0$  sinon :

$$X(0) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{0^k}{k!} N^k X_0 = N^0 X_0 = X_0.$$

Ainsi,  $X(t)$  est la solution du système  $(\mathcal{E})$  telle que  $X(0) = X_0$ .

```
17. def B(N, t):
    if Nil(N) == 0:
        return "N n'est pas nilpotente"
    else:
        T = np.eye(len(N))
        S = T
        for k in range(1, Nil(N)):
            T = t / k * np.dot(T, N)
            S = S + T
        return S
```