

Programme de colle 27

Semaines du 1er juin 2026

Chapitre 24 : Dérivées successives

Note aux colleurs. Ce chapitre n'a pas été abordé en classe, mais les étudiants doivent le travailler en autonomie. Il sera notamment utilisé pour le concours blanc.

Merci de demander à chacun une étude de convexité d'une fonction (voire une étude complète avec variations et allure de la courbe).

On peut en approfondissement demander de prouver une inégalité de convexité, en guidant l'exercice si besoin.

➤ Cours à connaître

- ✓ Fonctions 2 fois dérivables, fonction de classe \mathcal{C}^1 , \mathcal{C}^2 et de classe \mathcal{C}^∞ .
- ✓ Fonctions usuelles qui sont \mathcal{C}^∞ et opérations.
- ✓ Point critique, CN d'extremum local, caractérisation extremum local.
- ✓ Définition concave et convexe avec les cordes.
- ✓ Caractérisation de la convexité pour les fonctions de classe \mathcal{C}^2 avec notamment les tangentes et le signe de la dérivée seconde.
- ✓ Fonction convexe / concave et extremum.
- ✓ Définition point d'inflexion + caractérisation.

➤ Exercices type

- ✓ Justifier que des fonctions sont de classe \mathcal{C}^1 , \mathcal{C}^2 ou \mathcal{C}^∞ grâce aux opérations
- ✓ Déterminer les extrema locaux (point critique + changement de signe de la dérivée)
- ✓ Déterminer les intervalles sur lesquels une fonction est concave ou convexe.
- ✓ Donner les points d'inflexion d'une fonction.
- ✓ Utiliser la concavité ou la convexité pour montrer des inégalités : soit la définition avec la corde (utile quand vous avez 2 points x et y , souvent $t = 1/2$), soit l'équation de la tangente (quand il y a un seul point considéré)
- ✓ Étude complète d'une fonction (ensemble de définition, variations et convexité, étude d'une tangente) afin de tracer l'allure de la courbe.

Chapitre 25 : Variables aléatoires réelles discrètes

➤ Cours à connaître

- ✓ Variable aléatoire (la condition d'appartenance à la tribu n'est pas attendue)
- ✓ Support d'une variable aléatoire.
- ✓ Variable aléatoire discrète + loi
- ✓ Système complet d'événements associé à une variable aléatoire discrète
- ✓ Espérance d'une v.a discrète
- ✓ Espérance d'une constante

- ✓ Propriétés de l'espérance (positivité, linéarité)
- ✓ Théorème de transfert
- ✓ Variance et écart-type
- ✓ Formule de Koenig-Huygens
- ✓ Non-linéarité de la variance
- ✓ Variable aléatoire centrée et réduite

➤ **Exercices type**

- ✓ Établir qu'une suite de réels définit une loi de probabilité (vérifier les 3 points de la définition)
- ✓ Déterminer le support et la loi d'une variable aléatoire discrète.
- ✓ Déterminer la loi d'une fonction d'une variable aléatoire (exemple : X^2 ou e^X .)
- ✓ Calculer une espérance et une variance de variables aléatoires avec au besoin le théorème de transfert. On se rappellera que si le support est fini, la v.a admet toujours une espérance et une variance. Sinon, on commence par étudier la convergence de la série à partir de son terme général.
- ✓ Utiliser le théorème de transfert ou la linéarité pour déterminer l'espérance d'une variables aléatoire (par exemple $E(2x - 3)$ ou $E(\sqrt{X})$)

Chapitre 26 : Espaces vectoriels

➤ **Cours à connaître**

- ✓ Combinaison linéaire d'une famille de vecteurs
- ✓ Sous-espace vectoriel (définition ou caractérisation)
- ✓ Définition du Vect (= sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs)
- ✓ Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène
- ✓ Famille génératrice. Famille libre / liée.
- ✓ Caractérisation des familles libres à un ou deux éléments (vecteur non nul / vecteurs non colinéaires)
- ✓ Bases d'un ev + unicité de la décomposition.
- ✓ Matrice des coordonnées dans la base \mathcal{B} d'un vecteur (élément de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.)
- ✓ Base canonique de \mathbb{R}^n
- ✓ Dimension d'un ev : définition
- ✓ Nombre de vecteurs familles libres, génératrices et bases d'un sev de dimension n .
- ✓ Toute famille libre (ou génératrice) de n vecteurs dans un sev de dimension n est une base.

➤ **Exercices type**

- ✓ Montrer qu'un espace est un sev de \mathbb{R}^n en l'écrivant comme un Vect.
- ✓ Donner une base d'un espace vectoriel (l'écrire sous forme de Vect, ce qui donne une famille génératrice puis regarder si la famille est libre et « enlever » au besoin les vecteurs combinaisons linéaires des autres vecteurs.)
- ✓ Montrer qu'une famille est libre ou liée.
- ✓ Montrer qu'une famille est génératrice, libre ou liée.

- ✓ Montrer qu'une famille est une base. (Penser à la dimension pour se simplifier le travail.)
- ✓ Déterminer les coordonnées de vecteurs dans une nouvelle base.

Python : Fonctions et suites

En question de cours il faut savoir :

- Écrire une fonction Python renvoyant l'image d'un nombre x par une fonction f donnée.
- Écrire une fonction Python renvoyant le n^e terme d'une suite définie explicitement ou par une relation de récurrence .

En exercices de programmation on peut :

- Coupler les deux méthodes, par exemple définir une fonction $f(x) = x^2 - x$ puis la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
- Écrire une fonction en Python qui calcule le n^e terme d'une suite (définie explicitement ou par une relation de récurrence); puis une fonction de recherche de seuil (trouver le premier entier n tel que $u_n > 1000$ par exemple)
- Écrire une fonction qui prend un entier n en paramètre et renvoie le terme u_n d'une suite définie par une relation plus complexe :
 - relation de récurrence d'ordre 2, par exemple $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$
 - une relation mêlant le terme et l'indice, par exemple $u_{n+1} = 3u_n + n^2$
- Une fonction définie par morceaux, par exemple $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{x^2+1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$