
CHAPITRE 1

FONCTIONS USUELLES ET MÉTHODES DE CALCUL

1. Rappels sur les équations et inéquations	2
1.1 Équation et inéquation	2
1.2 Manipulation des inégalités	2
2. Fonctions affines	3
2.1 Étude d'une fonction affine	3
2.2 Résolution d'équations et d'inéquations du premier degré	3
3. Fonctions polynômes de degré 2	4
3.1 Étude générale des fonctions polynômes de degré 2	4
3.2 Résolution d'équations et d'inéquations du second degré	4
4. Fonction inverse	5
4.1 Rappels sur les fractions	5
4.2 Étude générale de la fonction inverse	6
4.3 Résolution d'équations et d'inéquations avec des fractions	7
5. La fonction exponentielle et la fonction logarithme népérien	7
5.1 Rappels sur les puissances	7
5.2 Étude de la fonction exponentielle	8
5.3 Étude de la fonction logarithme népérien	9
5.4 Résolution d'équations et inéquations avec des exp et des ln	10
6. Les fonctions puissances	11
6.1 Étude des fonctions puissances	11
6.2 Le cas particulier $\alpha = \frac{1}{2}$: la fonction racine carrée	12
6.3 Résolution d'équations et d'inéquations avec des racines	14
7. La fonction valeur absolue	14
7.1 Étude de la fonction valeur absolue	14
7.2 Résolution d'équations et d'inéquations avec des valeurs absolues	16
8. Fonction partie entière	17
8.1 Étude de la fonction partie entière	17
8.2 Résolution d'équations et d'inéquations avec des parties entières	17
TD	18
1. Fonctions affines, polynômes et inverses	18
2. Puissances entières, exponentielle et logarithme	18
3. Fonction puissance et racine carrée	19
4. Valeur absolue et partie entière	20
5. En autonomie	20
6. Type DS ou concours	21
Bilan	23
1. Organiser mes calculs	23
2. Résoudre des équations et des inéquations	24

Dans ce chapitre, nous allons revoir les fonctions usuelles (affines, polynômes, inverse, exponentielle et logarithme) et en étudier de nouvelles (puissances, valeur absolue et partie entière). Nous allons aussi retravailler la résolution d'équations et d'inéquations.

1. Rappels sur les équations et inéquations

1.1 Équation et inéquation

On rappelle qu'il existe 4 signes d'inégalités :

- $\leq$: inférieur ou égal
- $<$: inférieur strict
- $\geq$: supérieur ou égal
- $>$: supérieur strict

Définition 1 (Équation et inéquation)

Une (in)équation est une (in)égalité qui peut faire apparaître une (ou plusieurs) inconnue(s), généralement notée(s) x (puis y , etc.).

Exemple 2 :

- $7x^2 - 3x - 18 = 15$ et $e^x + \ln(x) - 7x + \frac{3+x}{7} = 0$ sont des équations,
- $e^x + x^2 - 7 \leq 0$ et $\frac{1}{x+2} > 3$ sont des inéquations,
- $3x + 1$ et $4n - 5$ ne sont ni des équations ni des inéquations.

Remarque 3 : Pour résoudre une (in)équation, on pensera toujours à déterminer le **domaine de définition de l'(in)équation** même lorsque ce n'est pas spécifiquement demandé. Il faudra ensuite vérifier que les solutions trouvées appartiennent bien à ce domaine de définition.

1.2 Manipulation des inégalités

On rappelle les règles suivantes qui vous serviront à manipuler des inégalités (larges ou strictes) ainsi que les encadrements. Ces règles sont aussi valables pour les égalités.

Propriété 4 (Manipulation des inégalités)

Soient a, b, c et d des nombres réels.

- ✓ Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité conserve l'ordre d'une inégalité.

$$\text{Si } a < b, \text{ alors } a + c < b + c \text{ et } a - c < b - c$$

- ✓ Multiplier ou diviser par un nombre **strictement positif** conserve l'ordre de l'inégalité.

$$\text{Si } k > 0 \text{ et } a < b, \text{ alors } k \times a < k \times b \text{ et } \frac{a}{k} < \frac{b}{k}.$$

- ✓ Multiplier ou diviser par un nombre **strictement négatif** change l'ordre de l'inégalité.

$$\text{Si } k < 0 \text{ et } a < b, \text{ alors } k \times a > k \times b \text{ et } \frac{a}{k} > \frac{b}{k}.$$

- ✓ Passage à l'inverse :

$$\text{Si } 0 < a \leq b, \text{ alors } 0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}. \quad \text{Si } a \leq b < 0, \text{ alors } \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0.$$

2. Fonctions affines

2.1 Étude d'une fonction affine

Définition 5 (Fonction affine)

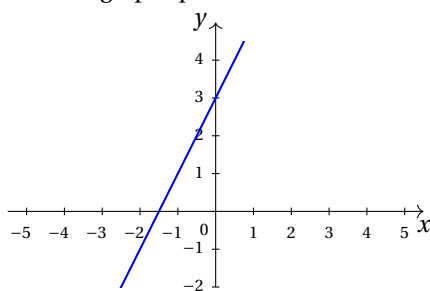
- ✓ Une **fonction affine** est une fonction de la forme $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto ax + b \end{cases}$ où a, b sont des réels fixés.
- ✓ Si $a = 0$, f est une **fonction constante**. Si $b = 0$, f est une **fonction linéaire**.

Proposition 6 (Dérivabilité)

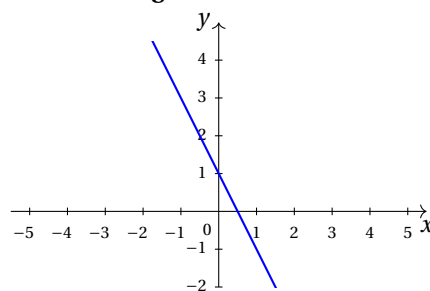
Une fonction affine f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a$

Proposition 7 (Variations et représentation graphique)

Une fonction affine est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 0$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $a < 0$. Elle admet pour représentation graphique une droite de **coefficient directeur** a et d'**ordonnée à l'origine** b .



$x \mapsto ax + b$ avec $a > 0$



$x \mapsto ax + b$ avec $a < 0$

2.2 Résolution d'équations et d'inéquations du premier degré

Théorème 8 (Équation et inéquation du premier degré)

Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$. L'équation $ax + b = 0$ admet une unique solution réelle qui vaut $x = -\frac{b}{a}$. L'étude du signe de $ax + b$ permet de résoudre les inéquations $ax + b \leq 0$ et $ax + b \geq 0$ (ainsi que les inéquations strictes).

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax + b$	signe de $-a$	0	signe de a

3. Fonctions polynômes de degré 2

3.1 Étude générale des fonctions polynômes de degré 2

Définition 9 (Fonction polynôme de degré 2)

Une **fonction polynôme de degré 2** (ou **fonction trinôme du second degré**) est une fonction de la forme

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto ax^2 + bx + c \end{cases} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \text{ sont fixés.}$$

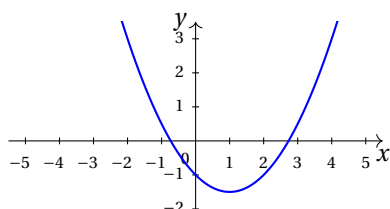
Proposition 10 (Dérivabilité)

Une fonction polynôme de degré 2 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2ax + b$.

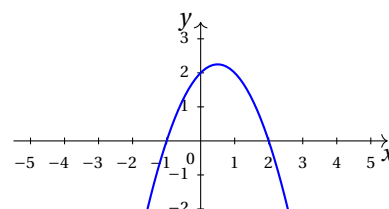
Proposition 11 (Variations et représentation graphique)

La courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 est une **parabole**.

- ✓ Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut et la fonction est strictement décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ et strictement croissante sur $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right[$.
- ✓ Si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas et la fonction est strictement croissante sur $\left]-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right[$.



$$x \mapsto ax^2 + bx + c \text{ avec } a > 0$$



$$x \mapsto ax^2 + bx + c \text{ avec } a < 0$$

3.2 Résolution d'équations et d'inéquations du second degré

Proposition 12 (Cas particulier : résolution des équations du type $x^2 = a$)

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On considère l'équation $x^2 = a$.

- ✓ Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution.
- ✓ Si $a = 0$, l'équation possède une unique solution $x = 0$.
- ✓ Si $a > 0$, l'équation possède deux solutions $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$.

Théorème 13 (Équation et inéquation de degré 2)

Soient a, b et $c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors :

- ✓ Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet 2 solutions $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et on a la factorisation :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de $-a$	signe de a

- ✓ Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et on a la factorisation :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de a

- ✓ Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution.

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$	signe de a	

Exemple 14 : Résoudre les inéquations suivantes :

1. $-x^2 + 5x - 6 \geq 0$

2. $2x^2 + 6 < 0$

3. $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$

4. $3x^2 + 4x - 5 > 0$

4. Fonction inverse

4.1 Rappels sur les fractions

Définition 15 (Écriture irréductible d'une fraction)

Une fraction est dite sous forme **irréductible** quand son numérateur et son dénominateur n'ont pas de facteurs communs autres que 1 et -1 . Autrement dit, on ne peut pas la simplifier.

Propriété 16 (Opérations sur les fractions)

Soient a, b, c, d des réels non nuls.

✓ **Simplifications basiques** : $\frac{0}{a} = 0$ $\frac{a}{1} = a$ $\frac{a}{-1} = -a$ $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

✓ **Addition et soustraction** : on additionne ou soustrait les fractions UNIQUEMENT si on les a mises au même dénominateur.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \dots \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \dots$$

✓ **Produit** : on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. (Il est totalement inutile de les mettre au même dénominateur.)

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \dots \qquad a \times \frac{b}{c} = \dots$$

✓ **Quotient** : Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dots$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dots$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \dots$$

Remarque 17 : On ne peut JAMAIS diviser par 0. Quel que soit $a \in \mathbb{R}$, $\frac{a}{0}$ n'existe pas!

4.2 Étude générale de la fonction inverse

Définition 18

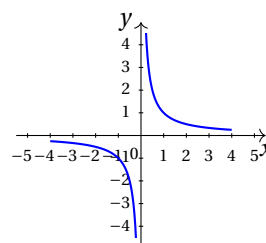
La **fonction inverse** est la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$

Proposition 19 (Dérivabilité)

La fonction inverse f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Proposition 20 (Variations et représentation graphique)

La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. Elle admet pour représentation graphique une **hyperbole** :



Remarque 21 : Il est totalement FAUX de dire que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*$. Elle est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.

4.3 Résolution d'équations et d'inéquations avec des fractions

Méthode 22 (Résolution d'une équation avec des quotients)

Lorsque l'on est en présence de fractions et qu'une inconnue figure au dénominateur :

- ✓ on commence par mettre tous les termes du même côté (si ce n'est pas déjà le cas),
- ✓ on met ensuite les fractions au même dénominateur pour être sous la forme $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$.

Cela revient alors à résoudre $A(x) = 0$ ET $B(x) \neq 0$.

Méthode 23 (Résolution d'une inéquation avec des quotients)

Lorsque l'on est en présence de fractions et qu'une inconnue figure au dénominateur :

- ✓ on commence par mettre tous les termes du même côté (si ce n'est pas déjà le cas),
- ✓ on met ensuite les fractions au même dénominateur pour être sous la forme $\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0$ ou $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$.

Il faut alors réaliser un **tableau de signes**. En effet, on n'étudie pas seulement le signe du numérateur, il faut étudier le signe du numérateur ET du dénominateur.

Exemple 24 : Résoudre l'équation $\frac{3x+2}{3x-2} = \frac{2}{x-1}$ puis l'inéquation $\frac{3x+2}{3x-2} \leq \frac{2}{x-1}$

5. La fonction exponentielle et la fonction logarithme népérien

5.1 Rappels sur les puissances

Définition 25 (Puissances entières)

- ✓ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on définit $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ si $a \neq 0$.
- ✓ Par convention, $a^0 = 1$ pour $a \neq 0$.

Propriété 26 (Règles de calcul)

Soient a et b deux nombres réels non nuls et m et n deux entiers relatifs.

✓ Avec des puissances différentes,

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a^m)^n = a^{m \times n}$$

✓ Avec des puissances identiques,

$$a^m \times b^m = (a \times b)^m \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Remarque 27 : En particulier,

✓ $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0^n = \dots$ ✓ $\forall n \in \mathbb{Z}, 1^n = \dots$ ✓ $\forall n \in \mathbb{Z}, (-1)^{2n} = \dots$ et $(-1)^{2n+1} = \dots$

✓ $2 \times 2^n = 2^1 \times 2^n = \dots$ (SURTOUT PAS $2 \times 2^n = 4^n$.)

Remarque 28 : Il n'y a PAS de règles avec l'addition ou la soustraction de puissances.

Proposition 29 (Identités remarquables)

Soient a et b des réels.

✓ $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

✓ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

✓ $a^2 - b^2 = (a + b) \times (a - b)$

5.2 Étude de la fonction exponentielle

Théorème - Définition 30 (Fonction exponentielle)

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. On l'appelle fonction exponentielle et on la note $\exp$.

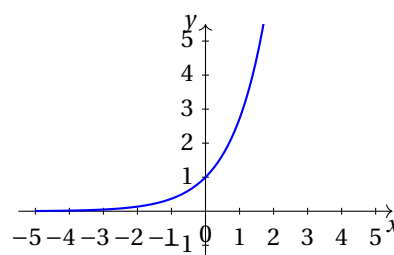
Notation 31

On note e le nombre $\exp(1)$ et $\exp(x) = e^x$. Le nombre e est une constante mathématique appelée nombre d'Euler ou constante de Néper d'après Leonhard Euler et John Napier.

Remarque 32 : On a $e^0 = 1$ et $e^1 = e \approx 2,718$.

Proposition 33 (Variations et représentation graphique)

La fonction exponentielle est strictement croissante et admet pour représentation graphique :



Propriété 34

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Par stricte croissance de la fonction exponentielle, on en déduit que :

$$\checkmark e^x = e^y \iff x = y,$$

$$\checkmark e^x < e^y \iff x < y.$$

Propriété 35 (algébrique)

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\checkmark e^{x+y} = e^x \times e^y$$

$$\checkmark e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$\checkmark e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$\checkmark e^{nx} = (e^x)^n$$

5.3 Étude de la fonction logarithme népérien

Définition 36 (Logarithme népérien)

La **fonction logarithme népérien** est la fonction $f : \begin{cases}]0; +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(x) \end{cases}$ Elle est définie comme l'unique primitive qui s'annule en 1 de la fonction inverse. Autrement dit,

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \text{ et } \ln(1) = 0$$

Remarque 37 : $\ln(0)$ n'existe pas!! Mais $\ln(1) = 0$.

Proposition 38 (Logarithme et exponentielle)

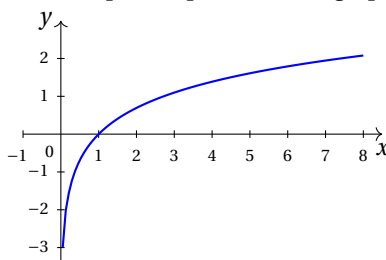
La **fonction logarithme népérien**, notée $\ln$, est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Ainsi, $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(y)$ est l'unique réel x tel que $e^x = y$.

Propriété 39 (Dérivabilité)

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Proposition 40 (Variations et représentation graphique)

La fonction $\ln$ est strictement croissante et admet pour représentation graphique :



Propriété 41

Soient x, y des réels strictement positifs. Par stricte croissance de la fonction $\ln$, on en déduit que :

$$\checkmark \ln(x) = \ln(y) \iff x = y,$$

$$\checkmark \ln(x) < \ln(y) \iff x < y.$$

Propriété 42 (algébriques)

Pour tous a, b réels strictement positifs, on a :

$$\checkmark \ln(1) = 0$$

$$\checkmark \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\checkmark \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\checkmark \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$$

$$\checkmark \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\checkmark \ln(a^k) = k \ln(a) \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}$$

Remarque 43 : Il n'existe pas de formule pour simplifier $\frac{\ln(a)}{\ln(b)}$ ni pour $\ln(a+b)$.

5.4 Résolution d'équations et inéquations avec des exp et des ln**Méthode 44 (Résolution d'une équation du type $e^{u(x)} = a$, $e^{u(x)} = e^{v(x)}$, $\ln u(x) = a$ ou $\ln u(x) = \ln v(x)$)**

1. On cherche le domaine de définition.
2. On applique la fonction exponentielle ou $\ln$ de chaque côté de l'équation. Attention, on applique la fonction $\ln$ seulement à des quantités POSITIVES!!!!
3. On résout ensuite la nouvelle équation et on vérifie que les solutions appartiennent bien au domaine de définition.

Exemple 45 : Déterminer le domaine de définition puis résoudre $e^{2x+3} = 4$ et $\ln(3x+2) = 1$

Remarque 46 : Les méthodes pour résoudre des inéquations sont les mêmes que pour les équations.

Méthode 47 (Résolution d'une équation du type $ae^{2x} + be^x + c = 0$ ou $a(\ln x)^2 + b \ln x + c = 0$)

1. On cherche le domaine de définition.
2. On effectue le changement de variables : $X = e^x$ ou $X = \ln x$.
3. On résout ensuite la nouvelle équation avec X et on n'oublie surtout pas de chercher x ensuite (c'est ce que l'on voulait au départ). On vérifie que les solutions appartiennent bien au domaine de définition.

Exemple 48 : Déterminer le domaine de définition puis résoudre l'équation $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

6. Les fonctions puissances

6.1 Étude des fonctions puissances

On connaît déjà la notion de puissance dans le cas où l'exposant est un entier relatif. On peut étendre cette définition dans le cas où l'exposant est un réel.

Définition 49 (Fonction puissance)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction **puissance alpha** est la fonction $f_\alpha : \begin{cases}]0; +\infty[& \rightarrow]0; +\infty[\\ x & \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \end{cases}$

Remarque 50 :

- ✓ Cette définition est cohérente avec la notion de puissance où l'exposant est un entier relatif. En effet, si n est un entier relatif et x un réel strictement positif, $x^n = (e^{\ln x})^n = e^{n \ln x}$.
- ✓ Il est impossible de considérer $x \leq 0$ dans la définition précédente. En effet, la fonction $\ln$ n'est définie que sur $]0; +\infty[$.
- ✓ L'écriture x^α n'est qu'une notation. Pour étudier une telle fonction, il faudra TOUJOURS repasser par l'écriture exponentielle (sauf si l'exposant est un entier relatif).

De même, pour étudier les fonctions du type $u(x)^{v(x)}$, il faudra commencer par écrire $u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln(u(x))}$ car $v(x)$ n'est a priori pas un entier relatif.

Propriété 51 (Règles de calcul)

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs et α et β deux nombres réels.

- ✓ Avec des puissances différentes,

$$a^\alpha \times a^\beta = a^{\alpha+\beta} \quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta} \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \times \beta}$$

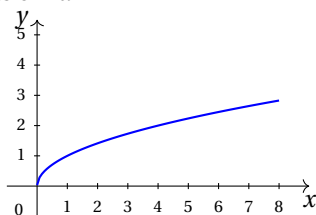
- ✓ Avec des puissances identiques,

$$a^\alpha \times b^\alpha = (a \times b)^\alpha \quad \frac{a^\alpha}{b^\alpha} = \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha$$

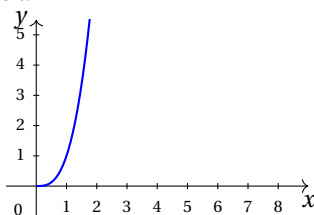
Proposition 52 (Représentation graphique)

La représentation des différentes fonctions puissances est donnée par les graphiques suivants.

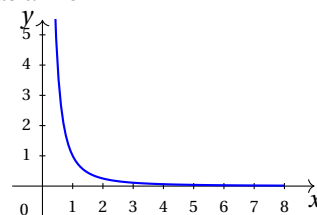
Cas $0 < \alpha < 1$



Cas $\alpha > 1$



Cas $\alpha < 0$


Remarque 53 :

- ✓ Si $\alpha = 0$, alors pour tout $x \in]0; +\infty[$, $x^\alpha = 1$.
- ✓ Si $\alpha = 1$, alors pour tout $x \in]0; +\infty[$, $x^\alpha = x$.

Proposition 54 (Dérivabilité)

- ✓ $\alpha \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.
- ✓ $\alpha \in \mathbb{Z}_-$. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.
- ✓ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

Proposition 55 (Variations)

- ✓ Cas $\alpha < 0$: $x \mapsto x^\alpha$ est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
- ✓ Cas $\alpha > 0$: $x \mapsto x^\alpha$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Remarque 56 : Les fonctions x^α et $x^{\frac{1}{\alpha}}$ sont réciproques l'une de l'autre pour tout $\alpha \neq 0$. En effet, $(x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = x$ et $(x^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha = x$. Leurs représentations graphiques sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

6.2 Le cas particulier $\alpha = \frac{1}{2}$: la fonction racine carrée

Définition 57 (Racine carrée)

La fonction **racine carrée** est la fonction $\begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ où $\sqrt{x}$ est défini comme l'unique réel positif dont le carré vaut x .

Remarque 58 :

- ✓ $\sqrt{x^2}$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ mais $(\sqrt{x})^2$ n'est défini que pour $x \in \mathbb{R}_+$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{x^2} = x$ et pour $x \in \mathbb{R}_-$, $\sqrt{x^2} = -x$.
- ✓ Pour tout $x > 0$, $(x^{\frac{1}{2}})^2 = x^{\frac{1}{2} \times 2} = x$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.
On peut prolonger la fonction $f_{\frac{1}{2}}$ en 0 en posant $f_{\frac{1}{2}}(0) = 0$. On retrouve alors la **fonction racine carrée**

$$f: \begin{matrix} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{matrix}.$$

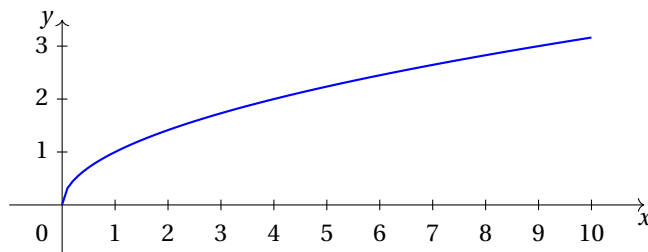
- ✓ Pour tout entier $n \geq 2$, on définit de même les **fonctions racines n -ième** $f_{\frac{1}{n}}$ pour $\alpha = \frac{1}{n}$ en posant aussi $f_{\frac{1}{n}}(0) = 0$.

Proposition 59 (Dérivabilité)

La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Proposition 60 (Variations et représentation graphique)

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle admet pour représentation graphique :

**Propriété 61 (algébrique)**

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ pour } b \neq 0.$$

Remarque 62 : En règle générale, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Par exemple, $5 = \sqrt{25} = \sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$.

Définition 63 (Expression conjuguée)

Soient a et b deux réels positifs tels que $a \neq b$. Alors l'**expression conjuguée** de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. On a alors :

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$$

En particulier, on utilisera l'expression conjuguée pour écrire les quotients différemment.

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} =$$

Remarque 64 : L'utilisation de la forme conjuguée sera notamment utile pour lever des indéterminations dans le cadre du calcul de limites. C'est une technique à retenir.

Exemple 65 : Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$\frac{1}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x}} =$$

6.3 Résolution d'équations et d'inéquations avec des racines

Méthode 66 (Résolution d'une (in)équation avec des racines carrées)

1. On cherche le domaine de définition (les termes sous la racine doivent être positifs et les racines sont toujours positives.)
2. Il faudra ensuite « se débarrasser » des racines en mettant l'(in)équation au carré puis la résoudre. Pour le passage au carré, on suppose de plus que les deux membres sont de même signe.
3. Enfin, il sera très important de prendre l'intersection des solutions de l'(in)équation mise au carré et du domaine de définition pour avoir les solutions de l'(in)équation de départ.

Exemple 67 : Résoudre l'équation $\sqrt{3x+5} - 3 = 0$ puis l'inéquation $\sqrt{3x+5} - 3 < 0$

7. La fonction valeur absolue

7.1 Étude de la fonction valeur absolue

Définition 68

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **valeur absolue de x** , notée $|x|$ le réel défini par : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

La **fonction valeur absolue** est la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto |x|$$

Exemple 69 : $|12,2| = 12,2$; $|-5| = 5$ et $|0| = 0$.

Exercice 70 : Écrire sans les valeurs absolues les nombres suivants :

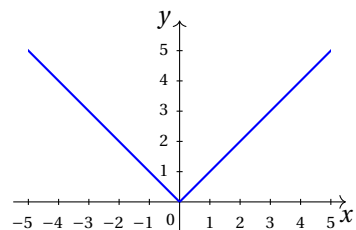
1. $|\sqrt{3} - 1|$
2. $|\pi - 5|$
3. $|x - 3|$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$

Proposition 71 (Dérivabilité)

La fonction valeur absolue f est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ mais pas en 0.
 Si $x > 0$, alors $f'(x) = 1$ et si $x < 0$, alors $f'(x) = -1$.

Proposition 72 (Variations et représentation graphique)

La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle admet pour représentation graphique :


Proposition 73

$$\checkmark \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0.$$

$$\checkmark \forall x \in \mathbb{R}, |-x| = |x|.$$

Remarque 74 : En particulier, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| = |y - x|$.

Propriété 75 (Opérations et valeur absolue)

Pour tous réels a et b , on a les propriétés suivantes :

$$\checkmark |ab| = |a| \times |b|$$

$$\checkmark \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \text{ pour } b \neq 0$$

$$\checkmark |a + b| \leq |a| + |b|$$

(1ère inégalité triangulaire)

$$\checkmark |a| - |b| \leq |a - b|$$

(2ème inégalité triangulaire)

Remarque 76 : On n'a pas toujours $|a + b| = |a| + |b|$. Donner un exemple pour lequel l'égalité n'est pas vérifiée.

Proposition 77 (Interprétation en termes de distance)

$\checkmark$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $|x|$ représente la **distance** entre 0 et x .

$\checkmark$ Soient a et $b \in \mathbb{R}$. Alors $|b - a|$ représente la distance entre a et b .

Exemple 78 :

- La distance entre 2 et 5 est
- La distance entre -3 et 2 est

Proposition 79

On déduit de la proposition précédente que pour tout réel r positif et pour tout réel x :

$$\begin{cases} |x| = r & \Longleftrightarrow x = r \text{ ou } x = -r \\ |x| \leq r & \Longleftrightarrow -r \leq x \leq r \\ |x| \geq r & \Longleftrightarrow x \geq r \text{ ou } x \leq -r \end{cases}$$

Proposition 80

Pour tous réels a et b , on a $|a| = |b| \iff a = b$ ou $a = -b$.

Proposition 81 (Lien entre la valeur absolue et la racine carrée)

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{a^2} = |a|.$$

Remarque 82 : Si $x \geq 0$, $\sqrt{x^2} = x$. Sinon, il ne faut pas oublier la valeur absolue. En effet, $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$ mais $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 \neq -5$.

7.2 Résolution d'équations et d'inéquations avec des valeurs absolues

Remarque 83 : Si $M < 0$, alors

1. l'équation $|x| = M$ et l'inéquation $|x| \leq M$ n'ont pas de solution.
2. tous les réels sont solutions de $|x| \geq M$.

Méthode 84 (Résolution d'une équation de la forme $|u(x)| = |v(x)|$)

Pour faire « tomber » les valeurs absolues qui encadrent les deux membres d'une égalité : $|u(x)| = |v(x)| \iff u(x) = v(x)$ ou $u(x) = -v(x)$ et on résout chacune des équations obtenues.

Attention : cette méthode s'applique uniquement si les valeurs absolues encadrent tout le membre de gauche et tout le membre de droite.

Exemple 85 : Résoudre $|2x + 3| = 5$ et $|2x + 3| = |5x - 2|$

Méthode 86 (Résolution d'une équation de la forme $|u(x)| \pm |v(x)| = a$)

Pour se débarrasser de la valeur absolue, on utilise la définition de la valeur absolue, à savoir pour tout réel t :

$$|t| = \begin{cases} t & \text{si } t \geq 0 \\ -t & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

et on l'applique aux éléments $u(x)$ et $v(x)$.

On réécrit alors l'équation sans les valeurs absolues sur différents intervalles et on les résout. On n'oubliera pas de vérifier que les solutions appartiennent bien aux intervalles de définition.

Remarque 87 : On procède de la même manière s'il faut résoudre une inéquation.

Exemple 88 : Résoudre $|2x + 3| + |5x - 2| = 4$

8. Fonction partie entière

8.1 Étude de la fonction partie entière

Définition 89

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **partie entière de x** , notée $\lfloor x \rfloor$, l'unique entier qui vérifie

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

La **fonction partie entière** est la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}.$$

Remarque 90 : $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x . C'est la fonction que vous utilisez lorsque vous donnez votre âge.

Exemple 91 : $\lfloor 3,7 \rfloor = 3$ et $\lfloor -5,2 \rfloor = -6$

Exercice 92 : $\lfloor 5 \rfloor =$, $\lfloor \frac{9}{4} \rfloor =$, $\lfloor 7,77\dots \rfloor =$, $\lfloor -1 \rfloor =$, $\lfloor 0 \rfloor =$, $\lfloor -1,3 \rfloor =$, $\lfloor -\pi \rfloor =$

Proposition 93

Soit $x \in \mathbb{R}$.

✓ $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$

✓ $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$

✓ $\forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

Remarque 94 : Soit $n \in \mathbb{Z}$, si $x \in [n, n + 1[$, alors $\lfloor x \rfloor = n$.

La fonction partie entière est constante sur les intervalles de la forme $[n, n + 1[$ où $n \in \mathbb{Z}$.

8.2 Résolution d'équations et d'inéquations avec des parties entières

Pour résoudre des équations et inéquations avec des parties entières, on n'oublie pas de déterminer le domaine de définition et on utilise :

Proposition 95

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor = n \iff n \leq x < n + 1.$$

TD

1. Fonctions affines, polynômes et inverses

☀ **Exercice 1** (Équation et inéquation du premier degré) :

Résoudre l'équation (E) : $3x + 1 = 0$ puis l'inéquation (I) : $3x + 1 \leq 0$ sur $\mathbb{R}$.

☕ **Exercice 2** (Inéquation du premier degré avec un paramètre) :

Résoudre l'inéquation de paramètre réel m : $(m^2 - 1)x < m + 1$.

☀ **Exercice 3** (Équation du second degré) :

Résoudre l'équation (E) : $3x^2 - 5 = 0$ sur $\mathbb{R}$.

☀ **Exercice 4** (Équation et inéquation du second degré) :

Résoudre l'équation (E) : $2x^2 + x - 6 = 0$ et l'inéquation (I) : $2x^2 + x - 6 > 0$ sur $\mathbb{R}$.

☕ **Exercice 5** (Équation du second degré avec un paramètre) :

Discuter et résoudre sur $\mathbb{R}$ suivant les valeurs de m l'équation : $mx^2 - 2mx + 2 = 0$.

☀ **Exercice 6** :

Écrire les fractions suivantes sous forme de fractions irréductibles.

$$1. A = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right)$$

$$2. B = \frac{\frac{4}{3} - 5}{\frac{3}{4}}$$

$$3. C = \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{3}}{\frac{5}{18} - \frac{1}{27}}$$

$$4. D = \frac{3}{2} \times \left(\frac{11}{4} - \frac{12}{5} \right)$$

☕ **Exercice 7** (Fractions) :

Donner les fractions suivantes sous forme de fractions les plus simples possible.

$$1. A = \frac{1}{n^2} - \frac{3}{4n}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$2. B = \frac{2x+1}{x^2-1} - \frac{7}{x+1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

☀ **Exercice 8** (Équation avec fractions et polynômes) :

Résoudre l'équation $\frac{2x}{x+3} + \frac{4}{x-1} = 3$.

☕ **Exercice 9** (Inéquations avec fractions et polynômes) :

Résoudre les inéquations :

$$1. \frac{2x}{x+3} + \frac{4}{x-1} \leq 3$$

$$2. \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x-1}{(x-1)^2}$$

2. Puissances entières, exponentielle et logarithme

☀ **Exercice 10** (Simplifications avec des puissances) :

1. Calculer les expressions suivantes.

$$(a) A = 3 \times 2^4 + 5 \times 4^3$$

$$(b) B = 1 - 3^2 \times (-5)^2$$

$$(c) C = -2^4$$

$$(d) D = 2^3 \times (-9) + 3^3 - (5^2 + 2^{-1})$$

2. Écrire, si possible, sous la forme d'une seule puissance de 2.

(a) $A = 2^3 \times \frac{2^{-4}}{2^5}$

(b) $B = \frac{8^2}{2^4}$

(c) $C = 2^3 + 2^4 \times 2^{-2}$

(d) $D = (2^3)^{-5} \times (2^{-4})^{-2}$

(e) $E = \frac{6^4}{3^4}$

☀ **Exercice 11** (Simplifications avec des puissances) :

Simplifier les expressions suivantes. On considèrera que n est un entier relatif.

1. $A = \frac{2^{-2} \cdot 4^3 \cdot 5^4 \cdot 3^7}{2^8 \cdot 5^{-3}}$

3. $C = (-1)^{n-1} \times (-1)^n \times (-1)^{n-2}$

5. $E = \frac{(-12)^3 \times 2^{2n+1}}{3^{3n+4} \times 4^n}$

2. $B = \frac{21 \times 10^9 \times 28 \times 10^7}{1200 \times (10^{-3})^2}$

4. $D = -\frac{(-12)^{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{9^n 8^n}$

6. $F = \frac{2^3 \times 2^{-7}}{(2^{-n})^2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

☀ **Exercice 12** (Développer) : Développer puis réduire les expressions suivantes :

1. $A = (2x^3 + 7x - 4)(x^2 - 1)$

2. $B = (-x + 3)^2 - (x + 2)^2$

3. $C = (2x - 1)^3$

☀ **Exercice 13** (D'autres identités remarquables) : Pour tous réels a , b et c , développer puis réduire :

1. $(a + b)^3$

3. $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

2. $(a - b)^3$

4. $(a + b + c)^2$

☀ **Exercice 14** (Factoriser) : Factoriser les expressions suivantes :

1. $A = (x - 1)(2x^2 + 4x) - (3x - 2)(x - 1)$

3. $C = 16 - x^2 + 3(x - 4)$ ☀

2. $B = (4x + 1)^2 - (4x + 1)$

☀ **Exercice 15** (Logarithmes et exponentielles) : Simplifier les nombres suivants :

1. $e^{3 \ln(2)}$

3. $-e^{-\ln(\frac{1}{2})}$

5. $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$

2. $e^{-2 \ln(3)}$

4. $\ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right)$

☀ **Exercice 16** (Logarithmes et exponentielles) :

1. $\ln\left((2 + \sqrt{3})^{20}\right) + \ln\left((2 - \sqrt{3})^{20}\right)$

3. $\frac{(e^x)^x}{e^{(x-1)^2}}$

2. $\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

4. $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2, x \in \mathbb{R}$

☀ **Exercice 17** (Résolution d'équations avec exponentielles ou logarithmes) : Résoudre les équations suivantes :

1. $(E) : e^{2x} = 2$

3. $(E) : \ln(x^2 - 3) + 5 = 0$

5. $(E) : e^{2x} + e^x - 6 = 0$

2. $(E) : e^{2x} - e^{x^2} = 0$

4. $(E) : \ln(3x + 1) = \ln(x)$

☀ **Exercice 18** (Résolution d'équations et inéquations avec exponentielles ou logarithmes) : Résoudre :

1. $e^x + e^{-x} = 2$

2. $\ln x + \ln(x + 1) = \ln 2$

3. $3 \ln(x)^2 - 7 \ln(x) - 10 \leq 0$

3. Fonction puissance et racine carrée

☀ **Exercice 19** (Racines et identités remarquables) : Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \sqrt{27} - \sqrt{75} + 4\sqrt{12}$

3. $C = \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2}$

5. $E = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$

2. $B = \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$

4. $D = \left(\sqrt{7 - \sqrt{6}} + \sqrt{7 + \sqrt{6}}\right)^2$

☀ **Exercice 20** : Montrer que si $x \geq 100$, alors $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{20}$.

Indication : on pourra faire apparaître l'identité remarquable $(a - b)(a + b)$.

☀ **Exercice 21** (Résolution d'(in)équations avec des racines carrées) : Résoudre les (in)équations suivantes :

1. $\sqrt{x^2 + 9} = 5$.

2. $\sqrt{x^2 + 3} = 2x$.

3. $\sqrt{2x - 4} \leq x + 2$.

☀ **Exercice 22** : Résoudre les inéquations

1. $5\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 10^{-10}$

2. $\sqrt{4 - x} \leq x - 7$.

3. $\sqrt{x + 5} \geq \sqrt{x^2 - 4}$

☀ **Exercice 23** (Astuce intéressante à retenir) :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 + X - 6 = 0$.

2. En déduire la résolution des équations $x^4 + x^2 - 6 = 0$ et $x + \sqrt{x} - 6 = 0$.

4. Valeur absolue et partie entière

☀ **Exercice 24** (Valeur absolue) : Résoudre les (in)équations :

1. $|2x + 4| = |x - 3|$

4. $|x^2 - 8x + 11| = 4$

7. $|x + 1| + |2x + 1| = 0$

2. $|2x - 1| \leq 3$

5. $|2x + 5| - |x - 1| = 2$

3. $|4 - 2x| \leq 8$

6. $|x + 3| + |x + 2| = 7$

8. $|x + 3| + |x + 2| \leq 7$

☀ **Exercice 25** : Résoudre :

1. $|2x + 1| = 3$

3. $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = \frac{1}{3}$

5. $\lfloor -2x \rfloor = \left\lfloor -\frac{1}{2} \right\rfloor$

7. $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor \leq 1$

2. $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = 1$

4. $\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor$

6. $\lfloor x^2 \rfloor = 3$

8. $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor > 1$

5. En autonomie

☀ **Exercice 26** (Inéquations simples) : Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $4x - 7 < 5$

2. $-2x + 3 \geq 9$

3. $-5x + 4 > -2$

☀ **Exercice 27** (Équation et inéquation du second degré) :

Résoudre l'équation (E) : $4x^2 - 6x + 2 = 0$ et l'inéquation (I) : $4x^2 - 6x + 2 \leq 0$ sur $\mathbb{R}$.

☀ **Exercice 28** (Équation du second degré avec un paramètre) :

Discuter et résoudre sur $\mathbb{R}$ suivant les valeurs de m l'équation : $x^2 - mx + \frac{1}{4} = 0$.

☀ **Exercice 29** (Équations avec fractions et polynômes) : Résoudre les équations suivantes :

1. $\frac{6x - 1}{4x - 1} = \frac{3x + 1}{2x - 5}$

2. $\frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x - 1} = 2 - x + x^2$

☀ **Exercice 30** (Inéquations avec fractions et polynômes) : Résoudre les inéquations suivantes (en précisant le domaine de définition).

1. $\frac{x}{x + 1} \leq \frac{x + 1}{x - 1}$

2. $\frac{x}{x + 1} + \frac{1}{x(x - 1)} \leq 1$

3. $\frac{x + 3}{x - 1} < \frac{x - 4}{x + 2}$

☀ **Exercice 31** (Simplifications avec des puissances) : Simplifier les expressions suivantes. On considérera que n est un entier relatif.

1. $A = 2^3 \times 4^{-2}$

3. $C = \frac{2^4 \times 5^2}{10^3}$

5. $E = 8^{n+1} - 4^n \times 2^{n+2}$

2. $B = \frac{5 \times 25^3}{125}$

4. $D = -\frac{15^2 \times 5^2 \times 7^3 \times 6 \times 2^{-5}}{10^2 \times 21 \times 5^{-3} \times (2^{-2})^3}$

6. $F = \frac{(-1)^{2n}}{(-1)^{2n+1}} \times \frac{(-1)^{3n} + (-1)^n}{(-1)^{2n} \times (-1)^n \times (-1)}$

☀ **Exercice 32** (Logarithmes et exponentielles) : Simplifier les nombres suivants :

- | | | | |
|--------------------|------------------------|---|---|
| 1. $\ln(\sqrt{e})$ | 4. $\ln(\sqrt[5]{e})$ | 7. $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln(e^2))}\right)$ | 8. $\exp\left(-\frac{1}{3}\ln(e^{-3})\right)$ |
| 2. $\ln(e^{1/3})$ | 5. $e^{\ln(3)-\ln(2)}$ | | |
| 3. $\ln(e^{-1/2})$ | 6. $e^{-\ln(\ln(2))}$ | | |

  **Exercice 33** (Résolution d'équations avec exponentielles ou logarithme) : Résoudre les équations ou inéquations suivantes (N'oubliez pas le domaine de définition.)

- | | | |
|---------------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| 1. $e^{2x-3} = 1$ | 3. $3e^{2x} + 4e^x - 7 = 0$ | 5. $(\ln x)^2 = -2 - 3\ln x$ |
| 2. $e^{4x+1} = e^{-5x+4}$ | 4. $\ln(x-2) = 3$ | 6. $\ln(3x+1) \leq \ln(2x-1)$ |

  **Exercice 34** (Résolutions d'équations avec des racines carrées) : Résoudre les équations suivantes.
Rappel de méthode :

1. Isoler la racine carrée, par exemple dans le membre de gauche
2. Étudier le signe de l'expression sous la racine carrée et du membre de droite. Les deux doivent être positifs
3. Appliquer le carré aux deux membres et résoudre l'équation obtenue.

- | | | |
|---------------------|-------------------------|------------------------|
| 1. $\sqrt{x-4} = 2$ | 2. $\sqrt{x^2-4} = 3-x$ | 3. $\sqrt{x} + 1 = 2x$ |
|---------------------|-------------------------|------------------------|

  **Exercice 35** (Résolutions d'inéquations avec des racines carrées) : Résoudre les inéquations suivantes.
Rappel de méthode :

On suit le même principe qu'à l'exercice précédent. Comme la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, il faut vérifier que les deux membres sont positifs. On peut alors mettre au carré en conservant l'inégalité.

- | | |
|---------------------------|-------------------------------|
| 1. $\sqrt{x+2} \leq x-4$ | 3. $\sqrt{7-x} \leq x-5$ |
| 2. $\sqrt{x^2+1} - 1 > 0$ | 4. $\sqrt{x^2+x-2} \leq 2x-1$ |

  **Exercice 36** (Équations avec valeurs absolues) : Résoudre les équations suivantes.

Ici presque toutes les équations sont de la forme $|x| = a$. Les études de signes sont donc inutiles : si $a > 0$ on a $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ ou $x = -a$. Seule la dernière question nécessite une étude de signe.

- | | | |
|---------------------|---------------------------|-------------------------|
| 1. $ x-2 = 2x+2 $ | 3. $ x-3 = -5$ | 5. $ 2x-3 - 2-x = 1$ |
| 2. $ x+3 = 5$ | 4. $ 3x-1 = \frac{3}{2}$ | |

  **Exercice 37** (Inéquations avec valeurs absolues) : Résoudre les inéquations suivantes.

Quand on a la forme $|x| \leq a$ avec a positif, on a l'équivalence avec $-a \leq x \leq a$. Pour les autres formes, il faut passer par une étude de signe pour faire « tomber » les valeurs absolues.

- | | | |
|-------------------|--------------------|------------------------|
| 1. $ x+1 \leq 3$ | 2. $ 4-2x \leq 8$ | 3. $ 2x-1 \leq x-1 $ |
|-------------------|--------------------|------------------------|

  **Exercice 38 :**

1. A l'aide de l'inégalité triangulaire, montrer que pour tout $x \geq 0$, $|x-2| \leq x+2$.
2. Comparer $|x-2|$ et $x+2$ quand $x < 0$.

6. Type DS ou concours

 **Exercice 39 : Prérequis : dériver une fonction de la forme $\ln(u)$, tableau de variations, limites.**

1. Étudier le signe de l'expression $\frac{2x-2}{x^2-2x-3}$
2. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \ln(2x^2 - 4x - 6)$$

- (a) Déterminer le domaine de définition de f .
- (b) Déterminer l'expression de sa dérivée f' .
- (c) Étudier le signe de f' puis dresser le tableau de variations complet de f .

Si on demande un tableau de variations complet, c'est qu'il faut y faire figurer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

Bilan

1. Organiser mes calculs

- ✓ **Quand on a des fractions** Quand on additionne des fractions, on essaie de choisir le plus petit dénominateur commun pour ne pas alourdir les calculs.
On n'oublie pas non plus que diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.
▶ TD : exos 5-6
Pour simplifier des fractions, il n'est pas judicieux de tout multiplier surtout si c'est pour obtenir de grands nombres. On peut décomposer chaque nombre au numérateur et au dénominateur pour effectuer des simplifications.
- ✓ **Quand on a des puissances** Il faut bien sûr apprendre les différentes règles de calcul. Et il est important de se rappeler que $(-1)^n$ vaut 1 ou -1 en fonction de la parité de n .
▶ Cours : rem 27 ; TD : exo 9-10
- ✓ **Quand on a des racines carrées** On n'oublie pas que $\sqrt{a^2} = a$ si $a > 0$ et $\sqrt{a^2} = -a$ si $a < 0$. On peut résumer par $\sqrt{a^2} = |a|$.
▶ TD : exo 18
Quand on a des racines carrées au dénominateur d'une fraction, il faut penser à la quantité conjuguée pour simplifier car on ne peut pas additionner des racines sauf si ce sont les mêmes.
▶ Cours : ex 65 ; TD : exo 18
- ✓ **Il faut bien maîtriser les identités remarquables.** En particulier, on retiendra $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ et $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Ces deux exemples sont souvent utiles pour faire des simplifications.
▶ TD : exos 11-12-13-18
- ✓ **Il faut aussi connaître les propriétés du logarithme et de l'exponentielle** pour pouvoir effectuer des simplifications.
▶ TD : exos 14-15
- ✓ **Quand on a des valeurs absolues** Il faut se rappeler que $|a| = |b| \iff a = b$ ou $a = -b$.
- ✓ **Quand on a des parties entières** Il y a deux propriétés importantes à retenir :
 - $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
 - $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

2. Résoudre des équations et des inéquations

- ✓ **On commence par chercher le domaine de définition de l'équation ou de l'inéquation.** Il peut y avoir des problèmes lorsque vous avez des fractions, du $\ln$ ou des racines carrées.
 - ▶ TD : exos 1-2-3-7
- ✓ **Ensuite, on résout l'(in)équation sur son domaine :** il faut maîtriser les différentes techniques vues en cours.
 - **Degré 1** Il faut connaître le signe de $ax + b$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.
 - ▶ TD : exos 1
 - **Degré 2** Il faut connaître les solutions d'un trinôme et leur signe.
 - ▶ TD : exos 2-3-4
 - **Fractions** On commence par mettre les fractions au même dénominateur. Pour les équations, il faut que le numérateur soit nul et le dénominateur non nul. Pour les inéquations, il faut étudier le signe du numérateur ET du dénominateur (il ne faut surtout pas l'oublier!!!)
 - ▶ TD : exos 6-7-8
 - **Exponentielle et logarithme** Si vous avez du logarithme, pensez à utiliser l'exponentielle et réciproquement.

Si vous avez des équations de la forme $ae^{2x} + be^x + c = 0$ ou $a(\ln(x))^2 + b\ln(x) + c = 0$, il est judicieux de faire le changement de variables $X = e^x$ ou $X = \ln(x)$.

 - ▶ TD : exos 16-17
 - **Racine carrée** Pour « enlever » les racines carrées, on passe habituellement au carré des deux côtés de l'inégalité.
 - ▶ TD : exos 19-20
 - **Valeur absolue** Il y a deux techniques principales : soit on utilise la propriété rappelée plus haut, soit on exprime la valeur absolue de chaque partie de l'(in)équation en fonction de x et on résout l'(in)équation.
 - ▶ TD : exo 23
 - **Partie entière** On utilise la propriété $\forall x \in \mathbb{R}, [x] = n \iff n \leq x < n + 1$.
 - ▶ TD : exo 24
- ✓ **Enfin, on vérifie si les solutions sont dans le domaine de définition et si elles vérifient l'équation.** Il est crucial de faire cette étape quand on a des racines carrées car le passage au carré est généralement une implication et non une équivalence.
- ✓ **On n'oublie pas de conclure en donnant les solutions.**

On remarquera que généralement, pour une équation, il y a un nombre fini de solutions (= quelques valeurs de x) alors que pour une inéquation il y a souvent un ou plusieurs intervalles solutions.

S'il n'y a aucune solution, on écrit $S = \emptyset$ (ensemble vide).

