
CHAPITRE 1

FONCTIONS USUELLES ET MÉTHODES DE CALCUL - CORRECTION

1. Fonctions affines, polynômes et inverses	1
2. Puissances entières, exponentielle et logarithme	6
3. Fonction puissance et racine carrée	10
4. Valeur absolue et partie entière	14
5. En autonomie	15
6. Type DS ou concours	24

1. Fonctions affines, polynômes et inverses

☀ **Exercice 1** (Équation et inéquation du premier degré) :

Résoudre l'équation $(E) : 3x + 1 = 0$ puis l'inéquation $(I) : 3x + 1 \leq 0$ sur $\mathbb{R}$.

On obtient $S_E = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$ et $S_I = \left] -\infty; -\frac{1}{3} \right]$.

☀ **Exercice 2** (Inéquation du premier degré avec un paramètre) :

Résoudre l'inéquation de paramètre réel $m : (m^2 - 1)x < m + 1$.

Ici on est tenté de diviser par $(m^2 - 1)$ pour isoler x dans le membre de gauche. Mais il faut vérifier que ce nombre soit non nul pour pouvoir diviser. De plus, il faut chercher le signe de ce nombre : s'il est négatif, il faudra changer l'ordre de l'inégalité.

On remarque que $m^2 - 1 = (m - 1)(m + 1)$. Donc cette expression s'annule pour $m \in \{-1; +1\}$. De plus, on vérifie que cette expression est strictement positive si $m \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ et strictement

négative si $m \in]-1; 1[$ (polynôme du second degré en m). On distingue donc les cas suivants.

Cas 1. $m \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$. Alors $m^2 - 1 > 0$. On a donc

$$\begin{aligned}(m^2 - 1)x < m + 1 &\iff x < \frac{m + 1}{m^2 - 1} \\ &\iff x < \frac{1}{m - 1}\end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $S = \left] -\infty, \frac{1}{m - 1} \right[$.

Cas 2. $m \in]-1; 1[$. Alors $m^2 - 1 < 0$. On a donc

$$\begin{aligned}(m^2 - 1)x < m + 1 &\iff x > \frac{m + 1}{m^2 - 1} \\ &\iff x > \frac{1}{m - 1}\end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $S = \left] \frac{1}{m - 1}, +\infty \right[$.

Cas 3. $m = -1$. Alors $m^2 - 1 = 0$. On a donc

$$(m^2 - 1)x < m + 1 \iff 0 < 0$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $S = \emptyset$.

Cas 4. $m = 1$. Alors $m^2 - 1 = 0$. On a donc

$$(m^2 - 1)x < m + 1 \iff 0 < 2$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $S = \mathbb{R}$.

☀ **Exercice 3** (Équation du second degré) :

Résoudre l'équation (E) : $3x^2 - 5 = 0$ sur $\mathbb{R}$.

On calcule $\Delta = 60$ et on obtient $x_1 = \frac{-0 - \sqrt{60}}{6} = -\frac{\sqrt{15}}{3}$ et $x_2 = \frac{0 + \sqrt{60}}{6} = \frac{\sqrt{15}}{3}$.

On en déduit $S = \left\{ -\frac{\sqrt{15}}{3}; \frac{\sqrt{15}}{3} \right\}$.

☀ **Exercice 4** (Équation et inéquation du second degré) :

Résoudre l'équation (E) : $2x^2 + x - 6 = 0$ et l'inéquation (I) : $2x^2 + x - 6 > 0$ sur $\mathbb{R}$.

On reconnaît un polynôme du second degré. On n'a pas à manipuler l'expression : on calcule directement le discriminant Δ et on calcule les racines.

Pour déterminer les solutions d'une inéquation du second degré, on se souvient que le trinôme est du signe du coefficient dominant (celui de x^2) à l'extérieur des racines.



Exercice 5 (Équation du second degré avec un paramètre) :

Discuter et résoudre sur $\mathbb{R}$ suivant les valeurs de m l'équation : $mx^2 - 2mx + 2 = 0$.

On rappelle que m est un paramètre, donc on effectue les calculs comme s'il s'agissait d'un nombre connu.

On remarque que si $m = 0$, le terme en x^2 disparaît. Dans ce cas ce n'est pas une équation du second degré.

Pour $m = 0$, l'équation devient $2 = 0$ qui n'a aucune solution.

Pour la suite, on suppose $m \neq 0$.

Pour résoudre cette équation de degré 2, on détermine le discriminant.

$$\Delta = 4m^2 - 4 \times m \times 2 = 4m^2 - 8m = 4m(m - 2).$$

On remarque que Δ s'annule pour $m = 0$ et pour $m = 2$ (racines évidentes). Le cas $m = 0$ est exclu (voir ci-dessus).

Cas 1. $\Delta > 0$, c'est-à-dire $m \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$. Alors l'équation admet deux solutions distinctes :

$$S = \left\{ \frac{4m + \sqrt{4m^2 + 8m}}{8}; \frac{4m - \sqrt{4m^2 + 8m}}{8} \right\}.$$

Cas 2. $\Delta < 0$, c'est-à-dire $m \in]0; 2[$. Alors l'équation n'admet aucune solution : $S = \emptyset$.

Cas 3. $\Delta = 0$, c'est-à-dire $m \in \{2\}$. Alors l'équation admet une unique solution : $S = \left\{ \frac{4m}{8} \right\} = \left\{ \frac{m}{2} \right\}$.



Exercice 6 :

Écrire les fractions suivantes sous forme de fractions irréductibles.

$$1. A = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right)$$

$$2. B = \frac{\frac{4}{3} - 5}{\frac{3}{4}}$$

$$3. C = \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{3}}{\frac{5}{18} - \frac{1}{27}}$$

$$4. D = \frac{3}{2} \times \left(\frac{11}{4} - \frac{12}{5} \right)$$

$$1. A = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad B &= \frac{\frac{4}{3} - 5}{\frac{3}{4}} = \frac{4-15}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{-11 \times 4}{9} = \frac{-44}{9} \\
 3. \quad C &= \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{3}}{\frac{5}{18} - \frac{1}{27}} = \frac{\frac{1-3}{9}}{\frac{15-2}{54}} = \frac{\frac{-2}{9}}{\frac{54}{54}} = \frac{-2}{9} \times \frac{54}{13} = -\frac{12}{13} \\
 4. \quad D &= \frac{3}{2} \times \left(\frac{11}{4} - \frac{12}{5} \right) = \frac{3}{2} \times \frac{55-48}{20} = \frac{3}{2} \times \frac{7}{20} = \frac{21}{40}
 \end{aligned}$$

 Exercice 7 (Fractions) :

Donner les fractions suivantes sous forme de fractions les plus simples possible.

$$\begin{aligned}
 1. \quad A &= \frac{1}{n^2} - \frac{3}{4n}, n \in \mathbb{N}^* & 2. \quad B &= \frac{2x+1}{x^2-1} - \frac{7}{x+1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1. \quad A &= \frac{1}{n^2} - \frac{3}{4n} = \frac{4-3n}{4n^2} \\
 2. \quad B &= \frac{2x+1}{x^2-1} - \frac{7}{x+1} = \frac{2x+1-7(x-1)}{x^2-1} = \frac{2x+1-7x+7}{x^2-1} = \frac{-5x+8}{x^2-1}
 \end{aligned}$$

 Exercice 8 (Équation avec fractions et polynômes) :

Résoudre l'équation $\frac{2x}{x+3} + \frac{4}{x-1} = 3$.

L'équation est définie si $x \in \mathbb{R} - \{-3; 1\}$. On a alors

$$\begin{aligned}
 \frac{2x}{x+3} + \frac{4}{x-1} = 3 &\iff \frac{2x}{x+3} + \frac{4}{x-1} - 3 = 0 \\
 &\iff \frac{2x(x-1) + 4(x+3) - 3(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-1)} = 0 \\
 &\iff \frac{-x^2 - 4x + 21}{(x-1)(x+3)} = 0 \\
 &\iff \begin{cases} -x^2 - 4x + 21 = 0 \\ (x-1)(x+3) \neq 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = -7 \text{ ou } x = 3 \\ x \notin \{-3; 1\} \end{cases}
 \end{aligned}$$

On en déduit l'ensemble des solutions $S = \{-7; 3\}$

 Exercice 9 (Inéquations avec fractions et polynômes) :

Résoudre les inéquations :

1. $\frac{2x}{x+3} + \frac{4}{x-1} \leq 3$

2. $\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x-1}{(x-1)^2}$

1. L'ensemble de définition de cette inéquation est $\mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{2x}{x+3} + \frac{4}{x-1} \leq 3 &\Leftrightarrow \frac{-x^2 - 4x + 21}{(x+3)(x-1)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-(x+7)(x-3)}{(x+3)(x-1)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+7)(x-3)}{(x+3)(x-1)} \geq 0 \end{aligned}$$

On va donc dresser un tableau de signes de l'expression obtenue.

x	$-\infty$	-7	-3	1	3	$+\infty$	
$x+7$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	
$x+3$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\frac{(x+7)(x-3)}{(x+3)(x-1)}$	$+$	0	$-$	$+$	$-$	0	$+$

On obtient comme ensemble de solutions

$$S =]-\infty; -7] \cup]-3; 1[\cup [3; +\infty[$$

2. L'ensemble de définition de cette équation est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x-1}{(x-1)^2} &\Leftrightarrow \frac{x(x-1)^2 - (x-1)(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)^2} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x(x-1) - (x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-x-1}{(x^2+1)(x-1)} \leq 0 \end{aligned}$$

On va donc dresser un tableau de signes de l'expression obtenue.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	0	+
x^2+1	+	+	+	+
$-x-1$	+	0	-	-
$\frac{-x-1}{(x^2+1)(x-1)}$	-	+	0	-

La valeur $x = 1$ est exclue car n'appartient pas à l'ensemble de définition. On obtient comme ensemble de solutions $S =]-\infty; -1] \cap]1; +\infty[$

2. Puissances entières, exponentielle et logarithme

☀ **Exercice 10** (Simplifications avec des puissances) :

1. Calculer les expressions suivantes.

(a) $A = 3 \times 2^4 + 5 \times 4^3$

(c) $C = -2^4$

(b) $B = 1 - 3^2 \times (-5)^2$

(d) $D = 2^3 \times (-9) + 3^3 - (5^2 + 2^{-1})$

2. Écrire, si possible, sous la forme d'une seule puissance de 2.

(a) $A = 2^3 \times \frac{2^{-4}}{2^5}$

(c) $C = 2^3 + 2^4 \times 2^{-2}$

(d) $D = (2^3)^{-5} \times (2^{-4})^{-2}$

(b) $B = \frac{8^2}{2^4}$

(e) $E = \frac{6^4}{3^4}$

1. (a) $A = 3 \times 2^4 + 5 \times 4^3 = 3 \times 16 + 5 \times 64 = 48 + 320 = 368$

(b) $B = 1 - 3^2 \times (-5)^2 = 1 - 9 \times 25 = 1 - 225 = -224$

(c) $C = -2^4 = -16$

(d) $D = 2^3 \times (-9) + 3^3 - (5^2 + 2^{-1}) = 8 \times (-9) + 27 - \left(25 + \frac{1}{2}\right) = -72 + 27 - 25,5 = -70,5$

2. (a) $A = 2^3 \times \frac{2^{-4}}{2^5} = 2^3 \times 2^{-9} = 2^{-6}$

(b) $B = \frac{8^2}{2^4} = \frac{(2^3)^2}{2^4} = \frac{2^6}{2^4} = 2^2$

(c) $C = 2^3 + 2^4 \times 2^{-2} = 2^3 + 2^2$ ne peut pas se simplifier. On obtient $8 + 4 = 12$ qui n'est pas une puissance de 2.

(d) $D = (2^3)^{-5} \times (2^{-4})^{-2} = 2^{-15} \times 2^8 = 2^{-7}$

(e) $E = \frac{6^4}{3^4} = \frac{2^4 \times 3^4}{3^4} = 2^4$

☀ **Exercice 11** (Simplifications avec des puissances) :

Simplifier les expressions suivantes. On considèrera que n est un entier relatif.

1. $A = \frac{2^{-2} \cdot 4^3 \cdot 5^4 \cdot 3^7}{2^8 \cdot 5^{-3}}$

3. $C = \frac{(-1)^{n-1} \times (-1)^n \times (-1)^{n-2}}{(-1)^{n-2}}$

5. $E = \frac{(-12)^3 \times 2^{2n+1}}{3^{3n+4} \times 4^n}$

2. $B = \frac{21 \times 10^9 \times 28 \times 10^7}{1200 \times (10^{-3})^2}$

4. $D = -\frac{(-12)^{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{9^n 8^n}$

6. $F = \frac{2^3 \times 2^{-7}}{(2^{-n})^2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

On pense à décomposer pour faire apparaître toutes les simplifications possibles. Ensuite on regroupe les puissances des mêmes nombres avec les règles du cours.

1. $A = \frac{2^{-2}4^35^43^7}{2^85^{-3}} = \frac{2^{-2}2^65^43^7}{2^85^{-3}} = 2^{-2+6-8}5^{4-(-3)}3^7 = 2^{-4}5^73^7$ On remarque que $4 = 2^2$ donc $4^3 = (2^2)^3 = 2^6$
2. $B = \frac{21 \times 10^9 \times 28 \times 10^7}{1200 \times (10^{-3})^2} = 10^{20}7^2 = 2^{20}5^{20}7^2$ on commence par simplifier les 3.
3. $C = (-1)^{n-1} \times (-1)^n \times (-1)^{n-2} = (-1)^{3n-3} = ((-1)^3)^{n-1} = (-1)^{n-1}$
4. $D = -\frac{(-12)^{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{9^n 8^n} = -\frac{12^{2n+1} 2^{-n+1}}{3^{2n} 2^{3n}} = \frac{3^{2n+1} 2^{4n+2} 2^{-n+1}}{3^{2n} 2^{3n}} = 3 \times 2^3$
5. $E = \frac{(-12)^3 \times 2^{2n+1}}{3^{3n+4} \times 4^n} = \frac{-3^3 2^6 2^{2n+1}}{3^{3n+4} 2^{2n}} = -\frac{2^7}{3^{3n+1}}$
6. $F = \frac{2^3 \times 2^{-7}}{(2^{-n})^2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = \frac{2^{-4}}{2^{-2n}} 2^{-2n-2} = 2^{-6}$

☀ **Exercice 12** (Développer) : Développer puis réduire les expressions suivantes :

1. $A = (2x^3 + 7x - 4)(x^2 - 1)$
2. $B = (-x + 3)^2 - (x + 2)^2$
3. $C = (2x - 1)^3$

On utilise la double distributivité ou les identités remarquables. Attention aux signes "moins"! Mieux vaut d'abord le laisser devant une parenthèse lors du développement, et changer les signes dans un second temps.

1. $A = (2x^3 + 7x - 4)(x^2 - 1) = 2x^5 + 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4$
2. $B = (-x + 3)^2 - (x + 2)^2 = 5 - 10x$
3. $C = (2x - 1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$

☀ **Exercice 13** (D'autres identités remarquables) : Pour tous réels a , b et c , développer puis réduire :

1. $(a + b)^3$
2. $(a - b)^3$
3. $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$
4. $(a + b + c)^2$

1. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
2. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ on peut aussi appliquer l'égalité précédente en remplaçant b par $-b$.
3. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
4. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

☀ **Exercice 14** (Factoriser) : Factoriser les expressions suivantes :

$$1. A = (x-1)(2x^2+4x) - (3x-2)(x-1)$$

$$3. C = 16 - x^2 + 3(x-4)$$

$$2. B = (4x+1)^2 - (4x+1)$$

$$1. A = (x-1)(2x^2+4x) - (3x-2)(x-1) = (x-1)((2x^2+4x) - (3x-2)) = (x-1)(2x^2+4x-3x+2) = (x-1)(2x^2+x+2)$$

On vérifie que le polynôme du second degré obtenu a un discriminant strictement négatif.
On ne peut donc pas factoriser davantage.

$$2. B = (4x+1)^2 - (4x+1) = (4x+1)((4x+1) - 1) = (4x+1)(4x) = 4x(4x+1)$$

$$3. C = 16 - x^2 + 3(x-4) = (4-x)(4+x) + 3(x-4) = (4-x)(4+x) - 3(4-x) = (4-x)(4+x-3) = (4-x)(1+x)$$

☀ **Exercice 15** (Logarithmes et exponentielles) : Simplifier les nombres suivants :

$$1. e^{3\ln(2)}$$

$$3. -e^{-\ln(\frac{1}{2})}$$

$$5. \ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$$

$$2. e^{-2\ln(3)}$$

$$4. \ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right)$$

$$1. e^{3\ln(2)} = 2^3 = 8$$

$$2. e^{-2\ln(3)} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

$$3. -e^{-\ln(\frac{1}{2})} = -e^{-1\ln(1/2)} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -2$$

$$4. \ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right) = -\ln(e^{17}) = -17$$

$$5. \ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2}) = \frac{1}{2}\ln(e^4) - \frac{1}{2}\ln(e^2) = \frac{1}{2} \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 = 2 - 1 = 1$$

☀ **Exercice 16** (Logarithmes et exponentielles) :

$$1. \ln\left((2+\sqrt{3})^{20}\right) + \ln\left((2-\sqrt{3})^{20}\right)$$

$$3. \frac{(e^x)^x}{e^{(x-1)^2}}$$

$$2. \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

$$4. (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2, x \in \mathbb{R}$$

$$1. \ln\left((2+\sqrt{3})^{20}\right) + \ln\left((2-\sqrt{3})^{20}\right) = 20\ln(2+\sqrt{3}) + 20\ln(2-\sqrt{3}) = 20(\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3})) = 20\ln((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})) = 20\ln(2^2 - \sqrt{3}^2) = 20\ln(4-3) = 20\ln(1) = 0$$

$$2. \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{5}^2 - 1^2}{4}\right) = \ln(1) = 0$$

$$3. \frac{(e^x)^x}{e^{(x-1)^2}} = \frac{e^{x^2}}{e^{x^2-2x+1}} = e^{x^2-(x^2-2x+1)} = e^{2x-1}$$

$$4. (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = (e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}) = 2e^x \times 2e^{-x} = 4e^{x-x} = 4e^0 = 4$$

Pour la première étape, on a factorisé en reconnaissant la forme $a^2 - b^2$.

☀ **Exercice 17** (Résolution d'équations avec exponentielles ou logarithmes) : Résoudre les équations suivantes :

1. $(E) : e^{2x} = 2$
2. $(E) : e^{2x} - e^{x^2} = 0$
3. $(E) : \ln(x^2 - 3) + 5 = 0$
4. $(E) : \ln(3x + 1) = \ln(x)$
5. $(E) : e^{2x} + e^x - 6 = 0$

1. $(E) : e^{2x} = 2$ L'équation (E) est définie sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}(E) &\iff \ln(e^{2x}) = \ln(2) \\ &\iff 2x = \ln(2) \\ &\iff x = \frac{\ln(2)}{2}\end{aligned}$$

Donc $S = \left\{ \frac{\ln(2)}{2} \right\}$.

2. $(E) : e^{2x} - e^{x^2} = 0$ définie sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(E) &\iff e^{2x} = e^{x^2} \\ &\iff 2x = x^2 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 2\end{aligned}$$

On a résolu l'équation du second degré soit en factorisant ($x^2 - 2x = x(x - 2)$), soit par calcul du discriminant Δ .

Donc $S = \{0; 2\}$.

3. $(E) : \ln(x^2 - 3) + 5 = 0$

L'équation (E) est définie si $x^2 - 3 > 0$, donc sur $]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[$. (on détermine le signe du polynôme du second degré $x^2 - 3$: du signe de $a = 1$ à l'extérieur des racines)

$$\begin{aligned}(E) &\iff \ln(x^2 - 3) = -5 \\ &\iff x^2 - 3 = e^{-5} \text{ on a appliqué la fonction exponentielle} \\ &\iff x^2 = 3 + e^{-5} \\ &\iff x = \sqrt{3 + e^{-5}} \text{ ou } x = -\sqrt{3 + e^{-5}}\end{aligned}$$

On vérifie que les racines appartiennent bien à l'ensemble de définition et on en déduit

$S = \{-\sqrt{3 + e^{-5}}; \sqrt{3 + e^{-5}}\}$.

4. $(E) : \ln(3x + 1) = \ln(x)$ Définie si $x > 0$ et $x > -\frac{1}{3}$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}(E) &\iff 3x + 1 = x \\ &\iff x = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Or la solution trouvée n'appartient pas à l'ensemble de définition de (E) . On a donc $S = \emptyset$.

5. $(E) : e^{2x} + e^x - 6 = 0$. Définie sur $\mathbb{R}$.

Comme cette équation contient plusieurs termes en e^x , on effectue le changement de variable $X = e^x$.

$$\begin{aligned}(E) &\iff X^2 + X - 6 = 0 \\ &\iff X = 2 \text{ ou } X = -3 \\ &\iff e^x = 2 \text{ ou } e^x = -3 \\ &\iff e^x = 2 \text{ on élimine le second cas, qui est impossible} \\ &\iff x = \ln(2)\end{aligned}$$

On en conclut que $S = \{\ln(2)\}$.

 **Exercice 18** (Résolution d'équations et inéquations avec exponentielles ou logarithmes) : Résoudre :

1. $e^x + e^{-x} = 2$

2. $\ln x + \ln(x+1) = \ln 2$

3. $3\ln(x)^2 - 7\ln(x) - 10 \leq 0$

1. $e^x + e^{-x} = 2(E)$

On pose $X = e^x$. On a alors $e^{-x} = \frac{1}{X}$ ce qui donne l'équation $X + \frac{1}{X} = 2$.

On multiplie par X les deux membres :

$$\begin{aligned}(E) &\iff X^2 - 2X + 1 = 0 \\ &\iff X = 1 \\ &\iff e^x = 1 \\ &\iff x = 0\end{aligned}$$

On conclut que $S = \{0\}$.

2. $\ln x + \ln(x+1) = \ln 2(E)$

L'équation (E) est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (car il faut vérifier $x > 0$ et $x+1 > 0$). On a alors :

$$\begin{aligned}(E) &\iff \ln(x(x+1)) = \ln(2) \\ &\iff x(x+1) = 2 \text{ en appliquant la fonction exponentielle} \\ &\iff x^2 + x - 2 = 0 \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = -2\end{aligned}$$

On élimine le cas $x = -2$ qui n'appartient pas à l'ensemble de définition. Ainsi, $S = \{1\}$.

3. $3\ln(x)^2 - 7\ln(x) - 10 \leq 0$ Définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (il faut avoir $x > 0$).

On effectue le changement de variable $X = \ln(x)$ pour obtenir $3X^2 - 7X - 10 \leq 0$. Une étude de signe donne $X \in \left[-1; \frac{10}{3}\right]$.

On trouve donc $S = \left[e^{-1}; e^{\frac{10}{3}}\right]$.

3. Fonction puissance et racine carrée

☀ **Exercice 19** (Racines et identités remarquables) : Simplifier les expressions suivantes :

$$1. A = \sqrt{27} - \sqrt{75} + 4\sqrt{12}$$

$$2. B = \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$3. C = \frac{\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}}{\sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2}} +$$

$$4. D = \left(\sqrt{7 - \sqrt{6}} + \sqrt{7 + \sqrt{6}} \right)^2$$

$$5. E = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}.$$

$$1. A = \sqrt{27} - \sqrt{75} + 4\sqrt{12} = 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

$$2. B = \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(1 - \sqrt{3})}{1 - 3} = \frac{\sqrt{3} - 3}{-2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

$$3. C = \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{5} - \sqrt{2} = \sqrt{5} - 1$$

On utilise $\sqrt{x^2} = x$ si $x \geq 0$ et $\sqrt{x^2} = -x$ si $x < 0$, en vérifiant d'abord le signe des expressions données.

$$4. D = \left(\sqrt{7 - \sqrt{6}} + \sqrt{7 + \sqrt{6}} \right)^2 = 7 - \sqrt{6} + 2\sqrt{7 - \sqrt{6}}\sqrt{7 + \sqrt{6}} + 7 + \sqrt{6} = 14 + 2\sqrt{7^2 - \sqrt{6}^2} = 14 + 2\sqrt{43}$$

$$5. E = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2}{1 - 2} = -(1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1 - 2\sqrt{2} + 2) = -6.$$

☀ **Exercice 20** : Montrer que si $x \geq 100$, alors $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{20}$.

Indication : on pourra faire apparaître l'identité remarquable $(a - b)(a + b)$.

Soit $x \geq 100$. Alors par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ on a $\sqrt{x} \geq 10$. De même, $\sqrt{x+1} \geq 10$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} x \geq 100 &\Rightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \geq 20 \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{20} \text{ par décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{20} \end{aligned}$$

En effet,
$$\frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{1}.$$

☀ **Exercice 21** (Résolution d'(in)équations avec des racines carrées) : Résoudre les (in)équations suivantes :

1. $\sqrt{x^2 + 9} = 5$.

2. $\sqrt{x^2 + 3} = 2x$.

3. $\sqrt{2x - 4} \leq x + 2$.

1. $\sqrt{x^2 + 9} = 5$ (E) définie sur $\mathbb{R}$

$$(E) \iff x^2 + 9 = 25$$

$$\iff x = -4 \text{ ou } x = 4$$

On a donc $S = \{-4; 4\}$.

2. $\sqrt{x^2 + 3} = 2x$ (E) définie sur $\mathbb{R}$.

Pour pouvoir mettre au carré, on vérifie d'abord que les deux membres soient positifs.

Cas 1. $x < 0$, alors (E) n'admet aucune solution.

Cas 2. $x \geq 0$, alors $2x \geq 0$ donc on peut mettre chaque membre de l'équation au carré

$$(E) \iff x^2 + 3 = (2x)^2$$

$$\iff x = -1 \text{ ou } x = 1$$

On exclut le cas $x = -1$ car on a supposé $x \geq 1$.

On a donc $S = \{1\}$.

3. $\sqrt{2x - 4} \leq x + 2$ (I) définie sur $[2; +\infty[$.

Pour $x \in [2; +\infty[$ on a $x + 2 \geq 0$, donc on peut mettre chaque membre de l'inéquation au carré.

$$(I) \iff 2x - 4 \leq (x + 2)^2$$

$$\iff x^2 + 2x + 8 \geq 0$$

Le polynôme du second degré obtenu a un discriminant négatif, il est toujours positif (signe du coefficient dominant).

On a donc $S = [2; +\infty[$.

🌟 Exercice 22 : Résoudre les inéquations

1. $5\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 10^{-10}$

2. $\sqrt{4 - x} \leq x - 7$.

3. $\sqrt{x + 5} \geq \sqrt{x^2 - 4}$

1. $5\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 10^{-10}$ (I) définie sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 (I) &\Leftrightarrow 5e^{x\ln(\frac{1}{3})} \leq 10^{-10} \\
 &\Leftrightarrow e^{-x\ln(3)} \leq \frac{1}{5}10^{-10} \\
 &\Leftrightarrow -x\ln(3) \leq \ln\left(\frac{1}{5}10^{-10}\right) \\
 &\Leftrightarrow -x\ln(3) \leq -10\ln(10) - \ln(5) \\
 &\Leftrightarrow x \geq \frac{10\ln(10) + \ln(5)}{\ln(3)}
 \end{aligned}$$

En divisant par $-\ln(3) < 0$. Donc $S = \left[\frac{10\ln(10) + \ln(5)}{\ln(3)}; +\infty \right[$.

2. $\sqrt{4-x} \leq x-7$ définie sur $] -\infty; 4]$.

On remarque que pour $x \leq 4$ on a $x-7 < 0$.

Donc $S = \emptyset$

3. $\sqrt{x+5} \geq \sqrt{x^2-4}$ (I) définie sur $[-5; -2] \cup [2; +\infty[$. On étudie les signes des deux expressions utilisées dans les racines carrées.

$$\begin{aligned}
 (I) &\Leftrightarrow x+5 \geq x^2-4 \\
 &\Leftrightarrow x^2-x-9 \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow x \in \left[\frac{1-\sqrt{37}}{2}; \frac{1+\sqrt{37}}{2} \right]
 \end{aligned}$$

Pour conclure, on vérifie parmi cet ensemble de solutions, lesquelles appartiennent à l'ensemble de définition de l'inéquation (I). Attention à vérifier l'ordre des bornes de ces ensembles!

Donc $S = \left[\frac{1-\sqrt{37}}{2}; -2 \right] \cup \left[2; \frac{1+\sqrt{37}}{2} \right]$

🌟 Exercice 23 (Astuce intéressante à retenir) :

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 + X - 6 = 0$.
- En déduire la résolution des équations $x^4 + x^2 - 6 = 0$ et $x + \sqrt{x} - 6 = 0$.

1. On trouve $S = \{-3; 2\}$

2. On pose $X = x^2$.

$$\begin{aligned}
 x^4 + x^2 - 6 = 0 &\Leftrightarrow X^2 + X - 6 = 0 \\
 &\Leftrightarrow X = -3 \text{ ou } X = 2 \\
 &\Leftrightarrow x^2 = -3 \text{ ou } x^2 = 2
 \end{aligned}$$

Le premier cas étant impossible, on conclut $S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$.

Pour la seconde équation, on pose $X = \sqrt{x}$. Alors $X^2 = x$.

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x} - 6 = 0 &\Leftrightarrow X^2 + X - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow X = -3 \text{ ou } X = 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} = -3 \text{ ou } \sqrt{x} = 2 \end{aligned}$$

Le premier cas étant impossible, on conclut $S = \{4\}$.

4. Valeur absolue et partie entière

 **Exercice 24** (Valeur absolue) : Résoudre les (in)équations :

- | | | |
|-------------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| 1. $ 2x + 4 = x - 3 $ | 4. $ x^2 - 8x + 11 = 4$ | 7. $ x + 1 + 2x + 1 = 0$ |
| 2. $ 2x - 1 \leq 3$ | 5. $ 2x + 5 - x - 1 = 2$ | |
| 3. $ 4 - 2x \leq 8$ | 6. $ x + 3 + x + 2 = 7$ | 8. $ x + 3 + x + 2 \leq 7$ |

1. $|2x + 4| = |x - 3| \Leftrightarrow 2x + 4 = x - 3 \text{ ou } 2x + 4 = -(x - 3).$

On obtient $S = \left\{-7; -\frac{1}{3}\right\}$

2. $|2x - 1| \leq 3 \quad (I)$

Cas 1. $x \geq \frac{1}{2}$, alors $2x - 1 \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned} (I) &\Leftrightarrow 2x - 1 \leq 3 \\ &\Leftrightarrow x \leq 2 \end{aligned}$$

Donc on obtient comme ensemble de solutions $[1/2; 2]$.

Cas 2. $x < 1/2$

$$\begin{aligned} (I) &\Leftrightarrow -2x + 1 \leq 3 \\ &\Leftrightarrow x \geq -1 \end{aligned}$$

On obtient comme ensemble de solutions $[-1; 1/2]$.

On a donc $S = [-1; 2]$.

3. $|4 - 2x| \leq 8$

On obtient $S = [-2; 6]$.

4. $|x^2 - 8x + 11| = 4 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 11 = 4 \text{ ou } x^2 - 8x + 11 = -4.$

On obtient $S = \{1; 3; 5; 7\}$.

5. $|2x + 5| - |x - 1| = 2.$

On distingue 3 cas, selon les signes des deux expressions. On obtient $S = \left\{-8; -\frac{2}{3}\right\}.$

6. $|x + 3| + |x + 2| = 7.$

Après avoir étudié les signes et distingué les cas, on obtient $S = \{-6; 1\}.$

7. $|x+1| + |2x+1| = 0$

On remarque qu'une somme de deux nombres positifs est nulle si et seulement si les deux nombres sont nuls. Or on a $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ et $2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

Donc $S = \emptyset$.

8. $|x+3| + |x+2| \leq 7$

On reprend l'étude de signe menée ci-dessus. On obtient au final $S = [-6; 1]$

☀ Exercice 25 : Résoudre :

1. $\lfloor 2x+1 \rfloor = 3$

3. $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = \frac{1}{3}$

5. $\lfloor -2x \rfloor = \left\lfloor -\frac{1}{2} \right\rfloor$

7. $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor \leq 1$

2. $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = 1$

4. $\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor$

6. $\lfloor x^2 \rfloor = 3$

8. $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor > 1$

1. $\lfloor 2x+1 \rfloor = 3 \Leftrightarrow 3 \leq 2x+1 < 4 \Leftrightarrow 1 \leq x < \frac{3}{2}$

Donc $S = \left[1; \frac{3}{2}\right[$

2. $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = 1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{3} < 2 \Leftrightarrow 3 \leq x < 6$

Donc $S = [3; 6[$

3. $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = \frac{1}{3}$ est impossible à vérifier : une partie entière est nécessairement un entier relatif.

Donc $S = \emptyset$.

4. $\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = 1 \Leftrightarrow 1 \leq x < 2$

Donc $S = [1; 2[$.

5. $\lfloor -2x \rfloor = \left\lfloor -\frac{1}{2} \right\rfloor \Leftrightarrow \lfloor -2x \rfloor = -1 \Leftrightarrow -1 \leq -2x < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq x > 0$

Donc $S =]0; 1/2]$.

6. $\lfloor x^2 \rfloor = 3 \Leftrightarrow 3 \leq x^2 < 4 \Leftrightarrow \sqrt{3} \leq x < 2 \text{ ou } -2 < x \leq -\sqrt{3}$

Penser à distinguer les deux cas : $\sqrt{x^2}$ peut valoir x ou $-x$ selon le signe de x .

Donc $S =]-\sqrt{3}; -2] \cup [\sqrt{3}; 2[$.

7. $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x}{3} < 2 \Leftrightarrow x < 6$

Donc $S =]-\infty; 6[$.

8. $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor > 1 \Leftrightarrow \frac{x}{3} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 6$

Donc $S = [6; +\infty[$.

5. En autonomie

  **Exercice 26** (Inéquations simples) : Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $4x - 7 < 5$

2. $-2x + 3 \geq 9$

3. $-5x + 4 > -2$

On obtient les ensembles de solutions suivants.

$$S_1 =]-\infty; 3[, \quad S_2 =]-\infty, -3] \quad \text{et} \quad S_3 = \left] -\infty, \frac{6}{5} \right[.$$

  **Exercice 27** (Équation et inéquation du second degré) :

Résoudre l'équation (E) : $4x^2 - 6x + 2 = 0$ et l'inéquation (I) : $4x^2 - 6x + 2 \leq 0$ sur $\mathbb{R}$.

On reconnaît un polynôme du second degré. On détermine ses racines :

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 4 \times 2 = 4.$$

$$\text{Ainsi, } x_1 = \frac{6-2}{8} = \frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{6+2}{8} = 1$$

$$\text{On obtient } S_E = \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}.$$

D'autre part le coefficient dominant est $4 > 0$, donc le polynôme est négatif à l'intérieur des racines.

$$\text{On en déduit } S_I = \left[\frac{1}{2}; 1 \right].$$

  **Exercice 28** (Équation du second degré avec un paramètre) :

Discuter et résoudre sur $\mathbb{R}$ suivant les valeurs de m l'équation : $x^2 - mx + \frac{1}{4} = 0$.

On reconnaît un polynôme du second degré d'inconnue x .

On calcule $\Delta = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$. On en déduit les cas suivants.

Cas 1. $\Delta > 0$, c'est-à-dire $m \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$. Alors
$$S = \left\{ \frac{m + \sqrt{m^2 - 1}}{2}; \frac{m - \sqrt{m^2 - 1}}{2} \right\}.$$

Cas 2. $\Delta < 0$, c'est-à-dire $m \in]-1; 1[$. Alors
$$S = \emptyset.$$

Cas 3. $\Delta = 0$, c'est-à-dire $m \in \{-1; 1\}$. Alors
$$S = \left\{ \frac{m}{2} \right\}.$$

(on peut détailler sous forme explicite : si $m = 1$ alors $S = \{1/2\}$ et si $m = -1$ alors $S = \{-1/2\}$)

  **Exercice 29** (Équations avec fractions et polynômes) : Résoudre les équations suivantes :

1. $\frac{6x-1}{4x-1} = \frac{3x+1}{2x-5}$

2. $\frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x-1} = 2 - x + x^2$

1. On commence par déterminer l'ensemble de définition de cette équation. Les dénominateurs sont non nuls sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{4}; \frac{5}{2} \right\}$.

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{4}; \frac{5}{2} \right\}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{6x-1}{4x-1} = \frac{3x+1}{2x-5} &\Leftrightarrow \frac{6x-1}{4x-1} - \frac{3x+1}{2x-5} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(6x-1)(2x-5) - (3x+1)(4x-1)}{(4x-1)(2x-5)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (6x-1)(2x-5) - (3x+1)(4x-1) = 0 \\ (4x-1)(2x-5) \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -33x+6=0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{4}; \frac{5}{2} \right\} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{33} = \frac{2}{11} \\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{4}; \frac{5}{2} \right\} \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $S = \left\{ \frac{2}{11} \right\}$.

2. L'ensemble de définition de cette équation est $\mathbb{R} - \{1\}$.

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a

$$\begin{aligned} \frac{x^3+2x^2-x+1}{x-1} = 2-x+x^2 &\Leftrightarrow \frac{(x^3+2x^2-x+1) - (2-x+x^2)(x-1)}{x-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4x^2-4x+3}{x-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-4x+3=0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Or vérifie que l'équation $4x^2-4x+3=0$ n'admet aucune solution (on obtient $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 3 = 16 - 48 = -32 < 0$).

On en déduit que l'ensemble des solutions est $S = \emptyset$.

  **Exercice 30** (Inéquations avec fractions et polynômes) : Résoudre les inéquations suivantes (en précisant le domaine de définition).

1. $\frac{x}{x+1} \leq \frac{x+1}{x-1}$

2. $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x(x-1)} \leq 1$

3. $\frac{x+3}{x-1} < \frac{x-4}{x+2}$

1. $\frac{x}{x+1} \leq \frac{x+1}{x-1}$.

Cette inéquation est équivalente à $\frac{-3x-1}{(x-1)(x+1)} \leq 0$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$-3x-1$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	
x^2-1	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{-3x-1}{x^2-1}$	$+$	$-$	0	$+$	$-$	

Donc l'ensemble des solutions est $S = \left] -1; -\frac{1}{3} \right] \cup]1; +\infty[$.

2. $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x(x-1)} \leq 1$

On se ramène à $\frac{-x^2+2x+1}{x(x+1)(x-1)} \leq 0$

Et on trouve à l'aide d'un tableau de signes que $S =]-1; 1-\sqrt{2}] \cup]0; 1[\cup]1+\sqrt{2}, +\infty[$.

3. $\frac{x+3}{x-1} < \frac{x-4}{x+2}$

On se ramène à $\frac{10x+2}{(x-1)(x+2)} < 0$. On obtient $S =]-\infty; -2[\cup \left] -\frac{1}{5}; 1 \right[$.

  **Exercice 31** (Simplifications avec des puissances) : Simplifier les expressions suivantes. On considèrera que n est un entier relatif.

1. $A = 2^3 \times 4^{-2}$

2. $B = \frac{5 \times 25^3}{125}$

3. $C = \frac{2^4 \times 5^2}{10^3}$

4. $D = -\frac{15^2 \times 5^2 \times 7^3 \times 6 \times 2^{-5}}{10^2 \times 21 \times 5^{-3} \times (2^{-2})^3}$

5. $E = 8^{n+1} - 4^n \times 2^{n+2}$

6. $F = \frac{(-1)^{2n}}{(-1)^{2n+1}} \times \frac{(-1)^{3n} + (-1)^n}{(-1)^{2n} \times (-1)^n \times (-1)}$ 

1. $A = 2^3 \times 4^{-2} = 2^3 2^{-4} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

2. $B = \frac{5 \times 25^3}{125} = \frac{5 \times 5^6}{5^3} = 5^{1+6-3} = 5^4$

3. $C = \frac{2^4 \times 5^2}{10^3} = \frac{2^4 5^2}{2^3 5^3} = 2 \times 5^{-1} = \frac{2}{5}$

4. $D = -\frac{15^2 \times 5^2 \times 7^3 \times 6 \times 2^{-5}}{10^2 \times 21 \times 5^{-3} \times (2^{-2})^3} = -\frac{3^2 5^2 5^2 7^3 2 \times 3 \times 2^{-5}}{2^2 5^2 3 \times 7 \times 5^{-3} 2^{-6}} = -3^2 5^5 7^2$

5. $E = 8^{n+1} - 4^n \times 2^{n+2} = 2^{3n+3} - 2^{2n} 2^{n+2} = 2^{3n+3} - 2^{3n+2} = 2 \times 2^{3n+2} - 2^{3n+2} = 2^{3n+2}$

Pour la première étape, on utilise le fait que $8^{n+1} = (2^3)^{n+1} = 2^{3 \times (n+1)} = 2^{3n+3}$

6. $F = \frac{(-1)^{2n}}{(-1)^{2n+1}} \times \frac{(-1)^{3n} + (-1)^n}{(-1)^{2n} \times (-1)^n \times (-1)} = \frac{1}{-1} \times \frac{(-1)^{3n} + (-1)^n}{(-1)^{n+1}} = -1 \times \left(\frac{(-1)^{3n}}{(-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}} \right) = -((-1)^{2n-1} + (-1)) = -((-1) + (-1)) = 2$

En remarquant que $2n-1$ est impair pour tout entier n , donc $(-1)^{2n-1} = -1$.

🏠 ☀ **Exercice 32** (Logarithmes et exponentielles) : Simplifier les nombres suivants :

- | | | |
|--------------------|------------------------|---|
| 1. $\ln(\sqrt{e})$ | 4. $\ln(\sqrt[5]{e})$ | 7. $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln(e^2))}\right)$ |
| 2. $\ln(e^{1/3})$ | 5. $e^{\ln(3)-\ln(2)}$ | 8. $\exp\left(-\frac{1}{3}\ln(e^{-3})\right)$ |
| 3. $\ln(e^{-1/2})$ | 6. $e^{-\ln(\ln(2))}$ | |

$$1. \ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}\ln(e) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$2. \ln(e^{1/3}) = \frac{1}{3}$$

$$3. \ln(e^{-1/2}) = -\frac{1}{2}$$

$$4. \ln(\sqrt[5]{e}) = \ln(e^{1/5}) = \frac{1}{5}$$

$$5. e^{\ln(3)-\ln(2)} = \frac{e^{\ln(3)}}{e^{\ln(2)}} = \frac{3}{2}$$

$$6. e^{-\ln(\ln(2))} = (\ln(2))^{-1} = \frac{1}{\ln(2)}$$

$$7. \ln\left(\sqrt{\exp(-\ln(e^2))}\right) = \ln\left(\sqrt{\exp(-2)}\right) = \frac{1}{2}\ln(\exp(-2)) = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$$

$$8. \exp\left(-\frac{1}{3}\ln(e^{-3})\right) = \exp\left(-\frac{1}{3} \times (-3)\right) = \exp(1) = e^1 = e$$

🏠 ☀ **Exercice 33** (Résolution d'équations avec exponentielles ou logarithme) : Résoudre les équations ou inéquations suivantes (N'oubliez pas le domaine de définition.)

- | | |
|-----------------------------|-------------------------------|
| 1. $e^{2x-3} = 1$ | 4. $\ln(x-2) = 3$ |
| 2. $e^{4x+1} = e^{-5x+4}$ | 5. $(\ln x)^2 = -2 - 3\ln x$ |
| 3. $3e^{2x} + 4e^x - 7 = 0$ | 6. $\ln(3x+1) \leq \ln(2x-1)$ |

$$1. e^{2x-3} = 1 (E) \text{ définie sur } \mathbb{R}.$$

$$(E) \iff \ln(e^{2x-3}) = \ln(1)$$

$$\iff 2x - 3 = 0$$

$$\iff x = \frac{3}{2}$$

$$\text{Donc } S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}.$$

2. $e^{4x+1} = e^{-5x+4}$ (E) définie sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(E) &\iff \ln(e^{4x+1}) = \ln(e^{-5x+4}) \\ &\iff 4x + 1 = -5x + 4 \\ &\iff x = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Donc $S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

3. $3e^{2x} + 4e^x - 7 = 0$ (E) définie sur $\mathbb{R}$. On effectue le changement de variable $X = e^x$.

$$\begin{aligned}(E) &\iff 3X^2 + 4X - 7 = 0 \\ &\iff X = 1 \text{ ou } X = -\frac{7}{3} \\ &\iff x = \ln(1) = 0\end{aligned}$$

On a exclu le cas $X = -\frac{7}{3}$ car X est nécessairement positif.

On a donc $S = \{0\}$.

4. $\ln(x-2) = 3$ (E) définie sur $]2; +\infty[$.

$$\begin{aligned}(E) &\iff x - 2 = e^3 \\ &\iff x = e^3 + 2\end{aligned}$$

Donc $S = \{e^3 + 2\}$ car $e^3 + 2$ appartient bien à l'ensemble de définition de (E).

5. $(\ln x)^2 = -2 - 3\ln x$ (E) définie sur $]0; +\infty[$.

On effectue le changement de variable $X = \ln(x)$.

$$\begin{aligned}(E) &\iff X^2 + 2 + 3X = 0 \\ &\iff X = -2 \text{ ou } X = 1 \\ &\iff x = e^{-2} \text{ ou } x = e^1\end{aligned}$$

Donc $S = \{e^{-2}; e^1\}$.

6. $\ln(3x+1) \leq \ln(2x-1)$ (E) définie sur $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$.

$$\begin{aligned}(E) &\iff 3x + 1 \leq 2x - 1 \\ &\iff x \leq -2\end{aligned}$$

Donc $S = \emptyset$ (les solutions trouvées n'appartiennent pas à l'ensemble de définition de (E)).

  **Exercice 34** (Résolutions d'équations avec des racines carrées) : Résoudre les équations suivantes.

Rappel de méthode :

1. Isoler la racine carrée, par exemple dans le membre de gauche

2. Étudier le signe de l'expression sous la racine carrée et du membre de droite. Les deux doivent être positifs

3. Appliquer le carré aux deux membres et résoudre l'équation obtenue.

$$1. \sqrt{x-4} = 2$$

$$2. \sqrt{x^2-4} = 3-x$$

$$3. \sqrt{x} + 1 = 2x$$

$$1. \sqrt{x-4} = 2 (E) \text{ définie sur } [4; +\infty[$$

$$(E) \iff x-4 = 4$$

$$\iff x = 8$$

Donc $S = \{8\}$ car cette solution appartient bien à l'ensemble de définition de (E).

$$2. \sqrt{x^2-4} = 3-x (E) \text{ définie sur }]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$$

Pour pouvoir mettre au carré, on vérifie que les deux membres soient positifs.

Cas 1. $x \in]3; +\infty[$, alors $3-x < 0$ donc x n'est pas solution de (E).

Cas 2. $x \in]-\infty; 3]$, alors $3-x \geq 0$

$$(E) \iff x^2 - 4 = (3-x)^2$$

$$\iff x = \frac{13}{6}$$

On vérifie que la solution trouvée appartient bien à la fois à l'ensemble de définition de (E) et au cas considéré.

$$\text{Donc } S = \left\{ \frac{13}{6} \right\}.$$

$$3. \sqrt{x} + 1 = 2x (E) \text{ définie sur } \mathbb{R}_+.$$

Cas 1. $x \in [0; 1/2[$. Alors $2x-1 < 0$ donc x n'est pas solution de (E).

Cas 2. $x \in [1/2; +\infty[$.

$$(E) \iff \sqrt{x} = 2x-1$$

$$\iff x = (2x-1)^2$$

$$\iff x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{4}$$

Donc $S = \{1\}$ car $\frac{1}{4}$ n'appartient pas à l'ensemble considéré dans ce cas.



Exercice 35 (Résolutions d'inéquations avec des racines carrées) : Résoudre les inéquations suivantes.

Rappel de méthode :

On suit le même principe qu'à l'exercice précédent. Comme la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, il faut vérifier que les deux membres sont positifs. On peut alors mettre au carré en conservant l'inégalité.

1. $\sqrt{x+2} \leq x-4$
2. $\sqrt{x^2+1}-1 > 0$
3. $\sqrt{7-x} \leq x-5$.
4. $\sqrt{x^2+x-2} \leq 2x-1$

1. $\sqrt{x+2} \leq x-4$ (I) définie sur $[-2; +\infty[$
 $x < 4$ ne peut pas être solution. On considère le cas $x \geq 4$.

$$\begin{aligned}(I) &\iff x+2 \leq (x-4)^2 \\ &\iff x^2 - 9x + 14 \geq 0 \\ &\iff x \in]-\infty; 2] \cup [7; +\infty[.\end{aligned}$$

Donc $S = [7; +\infty[$. (on vérifie que les solutions trouvées correspondent au cas considéré et à l'ensemble de définition.)

2. $\sqrt{x^2+1}-1 > 0$ (I) définie sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(I) &\iff \sqrt{x^2+1} > 1 \\ &\iff x^2 + 1 > 1 \\ &\iff x^2 > 0 \\ &\iff x \in \mathbb{R}^*\end{aligned}$$

Donc $S = \mathbb{R}^*$.

3. $\sqrt{7-x} \leq x-5$ (I) définie sur $] -\infty; 7]$.

Si $x < 5$, alors x ne peut pas être solution de (I). On considère donc le cas $x \geq 5$.

$$\begin{aligned}(I) &\iff 7-x \leq (x-5)^2 \\ &\iff x^2 - 9x + 18 \geq 0 \\ &\iff x \in]-\infty; 3] \cup [6; \infty[.\end{aligned}$$

Donc $S = [6; 7]$.

4. $\sqrt{x^2+x-2} \leq 2x-1$ (I) définie sur $] -\infty; -2] \cup [1; +\infty[$.

Si $x < 1/2$, alors $2x-1 < 0$, donc x n'est pas solution de (E). On s'intéresse au cas $x > 1/2$.

$$\begin{aligned}(I) &\iff x^2 + x - 2 \leq (2x-1)^2 \\ &\iff -3x^2 + 5x - 3 \leq 0\end{aligned}$$

On trouve $\Delta = -11$ donc le polynôme est toujours négatif (ici $a = -3 < 0$).

Donc $S = [1; +\infty[$.

  **Exercice 36** (Équations avec valeurs absolues) : Résoudre les équations suivantes.

Ici presque toutes les équations sont de la forme $|x| = a$. Les études de signes sont donc inutiles : si $a > 0$ on a $|x| = a \iff x = a$ ou $x = -a$. Seule la dernière question nécessite une étude de signe.

1. $|x - 2| = |2x + 2|$
2. $|x + 3| = 5$.
3. $|x - 3| = -5$.
4. $|3x - 1| = \frac{3}{2}$
5. $|2x - 3| - |2 - x| = 1$.

1. $|x - 2| = |2x + 2| \iff x - 2 = 2x + 2 \text{ ou } x - 2 = -2x - 2 \iff x = -4 \text{ ou } x = 0$.

Donc $S = \{-4; 0\}$.

2. $|x + 3| = 5 \iff x + 3 = 5 \text{ ou } x + 3 = -5 \iff x = 2 \text{ ou } x = -8$.

Donc $S = \{-8; 2\}$.

3. $|x - 3| = -5$.

Une valeur absolue ne peut pas être négative donc $S = \emptyset$

4. $|3x - 1| = \frac{3}{2} \iff 3x - 1 = \frac{3}{2} \text{ ou } 3x - 1 = -\frac{3}{2}$.

On obtient $S = \left\{ -\frac{1}{6}; \frac{5}{6} \right\}$.

5. $|2x - 3| - |2 - x| = 1 (E)$.

Sur $] -\infty; 3/2[$, on a $(E) \iff -2x + 3 - 2 + x = 1 \iff x = 0$.

Sur $[3/2; 2]$, on a $(E) \iff -2x + 3 - (2 - x) = 1 \iff x = 2$.

Sur $]2; +\infty[$, on a $(E) \iff -(-2x + 3 -)(-2 + x) = 1 \iff x = 2$ qui n'appartient pas à l'intervalle étudié.

Donc $S = \{0; 2\}$. En vérifiant bien que les solutions trouvées appartiennent bien aux ensembles considérés.

  **Exercice 37** (Inéquations avec valeurs absolues) : Résoudre les inéquations suivantes.

Quand on a la forme $|x| \leq a$ avec a positif, on a l'équivalence avec $-a \leq x \leq a$. Pour les autres formes, il faut passer par une étude de signe pour faire « tomber » les valeurs absolues.

1. $|x + 1| \leq 3$
2. $|4 - 2x| \leq 8$
3. $|2x - 1| \leq |x - 1|$.

1. $|x + 1| \leq 3$

Si $x \geq -1$ alors $|x + 1| = x + 1$. Donc on obtient $x + 1 \leq 3 \iff x \leq 2$. On obtient un premier intervalle de solutions $[-1; 2]$.

Si $x < -1$ alors $|x + 1| = -x - 1$. Donc on obtient $-x - 1 \leq 3 \iff -x \leq 4 \iff x \geq -4$. On obtient un second intervalle de solutions $[-4; -1[$

Donc $S = [-4; 2]$.

2. $|4 - 2x| \leq 8$

Si $x \geq 2$ on obtient $2x - 4 \leq 8$ ce qui donne $[2; 6]$.

Si $x < 2$ on obtient $4 - 2x \leq 8$ ce qui donne $[-2; 2[$

Donc $S = [-2; 6]$.

3. $|2x - 1| \leq |x - 1|$.

Sur $] -\infty; 1/2[$, l'inéquation s'écrit $-2x + 1 \leq -x + 1$. On obtient $[0; 1/2]$ comme ensemble de solutions.

Sur $[1/2; 1]$, l'inéquation s'écrit $2x - 1 \leq -x + 1$. On obtient $[1/2; 2/3]$ comme ensemble de

solutions.

Sur $]1; +\infty[$, l'inéquation s'écrit $2x - 1 \leq x - 1$. On obtient $\emptyset$ comme ensemble de solutions (l'inéquation aboutit à $x \leq 0$, ce qui ne correspond pas au cas étudié).

Donc $S = \left[0; \frac{2}{3}\right]$.

Exercice 38 :

1. A l'aide de l'inégalité triangulaire, montrer que pour tout $x \geq 0$, $|x - 2| \leq x + 2$.
2. Comparer $|x - 2|$ et $x + 2$ quand $x < 0$.

1. Soit $x \geq 0$.

Par l'inégalité triangulaire, $|x - 2| \leq |x| + |-2|$.

Or $x \geq 0$, donc $|x| = x$. De plus, $|-2| = 2$

On obtient donc $|x + 2| \leq x + 2$.

2. Si $x < 0$ alors on a $x - 2 < 0$, et par conséquent $|x - 2| = -(x - 2) = -x + 2$. Par ailleurs, $-x \geq x$ (comparer les signes!)

On en conclut que $|x - 2| \geq x + 2$.

6. Type DS ou concours

 **Exercice 39 :** *Prérequis : dériver une fonction de la forme $\ln(u)$, dresser un tableau de variations, déterminer des limites.*

1. Étudier le signe de l'expression $\frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 3}$
2. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \ln(2x^2 - 4x - 6)$$

- (a) Déterminer le domaine de définition de f .
- (b) Déterminer l'expression de sa dérivée f' .
- (c) Étudier le signe de f' puis dresser le tableau de variations complet de f .

Si on demande un tableau de variations complet, c'est qu'il faut y faire figurer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

1. L'expression $2x - 2$ s'annule pour $x = 1$.
Le polynôme $x^2 - 2x - 3$ s'annule pour $x = -1$ et $x = 3$ (à trouver par le calcul de Δ). Il est positif (signe de a) à l'extérieur de ces racines.
On en déduit le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$2x-2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{x^2-2x-3}{2x-3}$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\frac{2x-2}{x^2-2x-3}$	$-$	$+$	0	$-$	$+$

2. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \ln(2x^2 - 4x - 6)$$

(a) f est définie sur $2x^2 - 4x - 6 > 0$. On remarque que $2x^2 - 4x - 6 = 2(x^2 - 2x - 3)$, donc cette expression a le même signe que $x^2 - 2x - 3$.

D'après la question précédente, on en déduit que $D_f =]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$.

(b) On utilise la formule $\ln(u)' = \frac{u'}{u}$. On obtient $f'(x) = \frac{4x-4}{2x^2-4x-6} = \frac{2x-2}{x^2-2x-3}$.

(c) Le signe de f' est obtenu par le tableau de signes de la question 1.

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - 4x - 6) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 4x - 6) = +\infty$ (parabole tournée vers le haut car le coefficient dominant est positif). On a alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

De même en -1 et en 3 le polynôme est nul, donc en appliquant la fonction $\ln$, on obtient comme limite $-\infty$.

On obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$