

CALCULS

Fractions

Exercice 1 : Simplifier les fractions suivantes.

$$1. A = \frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{7} - \frac{3}{4} \right) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{12}{28} - \frac{21}{28} \right) = \frac{2}{3} \times \frac{-9}{28} = \frac{-2 \times 3 \times 3}{3 \times 1 \times 14} = -\frac{3}{14}$$

$$2. B = \frac{\frac{3}{4} - 2}{\frac{-4}{5} - 1} = \frac{\frac{-5}{4}}{\frac{-9}{5}} = \frac{-5}{4} \times \frac{5}{-9} = \frac{25}{36}$$

$$3. C = \frac{3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{18+3-2}{6}}{\frac{18-3+2}{6}} = \frac{19/6}{17/6} = \frac{19}{6} \times \frac{6}{17} = \frac{19}{17}$$

$$4. D = \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{7}{8} - \left(\frac{2}{4} - 1 \right) \right) = \left(\frac{3}{4} - \frac{6}{4} \right) - \left(\frac{7}{8} - \left(-\frac{2}{4} \right) \right) = -\frac{3}{4} - \left(\frac{7}{8} + \frac{4}{8} \right) = -\frac{3}{4} - \frac{11}{8} = -\frac{17}{8}$$

$$5. E = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{7}{24} \right) \times \frac{12}{49} = \frac{8+6-7}{24} \times \frac{12}{49} = \frac{7}{24} \times \frac{12}{49} = \frac{7 \times 12}{12 \times 2 \times 7 \times 7} = \frac{1}{14}$$

$$6. F = \frac{x+5}{1 + \frac{2}{x+3}} = \frac{x+5}{\frac{x+3+2}{x+3}} = \frac{x+5}{\frac{x+5}{x+3}} = (x+5) \times \frac{x+3}{x+5} = x+3.$$

Ainsi, pour $x \neq -3$ et $x \neq -5$, $\boxed{F = x+3}$.

$$7. G = \frac{\frac{3x+1}{x-1} - \frac{2x}{5x+1}}{\frac{x+2}{x+3} - \frac{2x-3}{x+5}}.$$

On simplifie séparément le numérateur et le dénominateur :

$$\frac{3x+1}{x-1} - \frac{2x}{5x+1} = \frac{(3x+1)(5x+1) - 2x(x-1)}{(x-1)(5x+1)} = \frac{13x^2 + 10x + 1}{(x-1)(5x+1)},$$

$$\text{et } \frac{x+2}{x+3} - \frac{2x-3}{x+5} = \frac{(x+2)(x+5) - (2x-3)(x+3)}{(x+3)(x+5)} = \frac{x^2 - 7x - 21}{(x+3)(x+5)}.$$

$$\text{Ainsi, } G = \frac{13x^2 + 10x + 1}{(x-1)(5x+1)} \times \frac{(x+3)(x+5)}{x^2 - 7x - 21}.$$

$$\text{Donc } \boxed{G = \frac{(13x^2 + 10x + 1)(x+3)(x+5)}{(x-1)(5x+1)(x^2 - 7x - 21)}}.$$

Calcul avec des racines

Exercice 2 : Simplifier :

$$1. A = \sqrt{8} - \sqrt{75} + 4\sqrt{12} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} - \sqrt{25} \times \sqrt{3} + 4\sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + 4 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$$

$$2. B = \frac{\sqrt{\frac{450}{25}} \times \sqrt{1}}{45} = \frac{\sqrt{\frac{90}{5}}}{45} = \frac{\sqrt{18}}{45} = \frac{3\sqrt{2}}{45} = \frac{\sqrt{2}}{15}$$

$$3. C = \frac{\sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(1 - \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5} - 5}{1 - 5} = \frac{\sqrt{5} - 5}{-4} = \frac{5 - \sqrt{5}}{4}$$

$$4. \text{ On remarque que } 1 - \sqrt{3} < 0 \text{ donc } \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = -1 + \sqrt{3}$$

$$\text{De plus, } \sqrt{5} - \sqrt{3} > 0 \text{ donc } \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2} = \sqrt{5} - \sqrt{3}.$$

On a donc

$$D = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2} = -1 + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3} = \sqrt{5} - 1$$

5. On développe avec une identité remarquable :

$$E = \left(\sqrt{3 - \sqrt{4}} + \sqrt{3 + \sqrt{4}} \right)^2 = \left(\sqrt{3 - \sqrt{4}} \right)^2 + 2\sqrt{3 - \sqrt{4}}\sqrt{3 + \sqrt{4}} + \left(\sqrt{3 + \sqrt{4}} \right)^2$$

$$E = 3 - \sqrt{4} + 2\sqrt{(3 - \sqrt{4})(3 + \sqrt{4})} + 3 + \sqrt{4} = 6 + 2\sqrt{3^2 - \sqrt{4}^2} = 6 + 2\sqrt{5}$$

Calcul avec des puissances

Exercice 3 : Simplifier les expressions suivantes :

$$1. A = 2^3 \times 5^5 \times 2^{-7} = 2^{-4} \times 5^5$$

$$2. B = \frac{2^3 \times 5^3}{7^3} = \left(\frac{2 \times 5}{7} \right)^3$$

$$3. C = \frac{7^5}{7^{-3}} = 7^{5 - (-3)} = 7^8$$

$$4. D = \left(\frac{3^{-2}}{3} \right)^4 = (3^{-3})^4 = 3^{-3 \times 4} = 3^{-12}$$

$$5. E = 5^4 \times 25^{-7} \times \left(\frac{1}{5} \right)^3 = 5^4 \times 5^{-14} \times 5^{-3} = 5^{-13}$$

$$6. F = \frac{x^5 \times x^{-3}}{x^2} = x^{5-3-2} = x^0 = 1$$

Exercice 4 : Même consigne.

$$1. A = \frac{18 \times 10^4 \times 27 \times 10^3}{1200 \times (10^2)^2} = \frac{(3^2 \times 2) \times (2^4 \times 5^4) \times (3^3) \times (2^3 \times 5^3)}{(3 \times 2^4 \times 5^2) \times (2^4 \times 5^4)} = \frac{2^8 \times 3^5 \times 5^7}{3 \times 2^8 \times 5^6} = 3^4 \times 5 = 405$$

$$2. B = (-3)^3 \times 2 + 3^2 \times 2^4 - 5 \times 2^3 = -27 \times 2 + 9 \times 16 - 5 \times 8 = -54 + 144 - 40 = 50$$

$$3. C = 3 \times \left(\frac{3}{2} \right)^2 - (2^3 \times 2) = \frac{3^3}{2^2} - 2^4 = \frac{3^3 - 2^6}{2^2} = \frac{27 - 64}{4} = -\frac{37}{4}$$

$$4. D = \frac{(3 \times 10^{-2})^3 \times (5^2 \times 10^4)^2}{3^3 \times 2^2 \times 5^2 \times 5^4} = \frac{3^3 \times 10^{-6} \times 5^4 \times 10^8}{3^3 \times 2^2 \times 5^2 \times 5^4} = \frac{3^3 \times 10^2 \times 5^4}{3 \times 2 \times 2^3 \times 5^3 \times 5^2 \times 5^7 \times 2^7}$$

$$D = \frac{3 \times 2^{11} \times 5^{12}}{2^9 \times 5^6} = \frac{8\,000\,000}{1}$$

$$5. E = \frac{25 \times (10^2)^{-5} \times 121}{11 \times 75 \times 10^{-9}} = \frac{5^2 \times 2^{-10} \times 5^{-10} \times 11^2}{11 \times 5^2 \times 3 \times 5^{-9} \times 2^{-9}} = \frac{5^{-1} \times 2^{-1} \times 11}{3} = \frac{11}{30}$$

$$6. F = \frac{a^4 b^5 (ab)^{-2}}{a^{-4} b^7} = \frac{a^4 b^5 a^{-2} b^{-2}}{a^{-4} b^7} = a^6 b^{-4} = \frac{a^6}{b^4}$$

Exponentielle et logarithme népérien

Exercice 5 : Simplifier

$$1. A = \ln(9) - \ln(8) - \ln(6) - \ln(15) + \ln(5) = \ln(3^2) - \ln(2^3) - \ln(2 \times 3) - \ln(3 \times 5) + \ln(5) = 2\ln(3) - 3\ln(2) - \ln(2) - \ln(3) - \ln(3) - \ln(5) + \ln(5) = -4\ln(2)$$

$$2. B = \ln\left(\frac{2x+1}{3x}\right) + \ln\left(\frac{2}{4x+2}\right) = \ln(2x+1) - \ln(3x) + \ln\left(\frac{1}{2x+1}\right) = \ln(2x+1) - \ln(3) - \ln(x) - \ln(2x+1) = -\ln(3) - \ln(x)$$

$$3. C = \frac{e^{3x+2}e^{-2x}}{e^{9x+6}e^{-16x}} = \frac{e^{3x+2-2x}}{e^{9x+6-16x}} = \frac{e^{x+2}}{e^{-7x+6}} = e^{x+2-(-7x+6)} = e^{8x-4}$$

Développement et Factorisation

Exercice 6 : Développer et réduire les expressions suivantes.

$$1. A = (x^2 + 2x + 1)(x + 3) = x^3 + 3x^2 + 2x^2 + 6x + x + 3 = x^3 + 5x^2 + 7x + 3$$

$$2. B = (3x + 3)^2 - (-6 + x)^2 = 9x^2 + 18x + 9 - (36 - 12x + x^2) = 8x^2 + 30x - 27$$

$$3. C = \left(6x - \frac{1}{6}\right)^2 = 36x^2 - 2 \times 6x \times \frac{1}{6} + (1/6)^2 = 36x^2 - 2x + \frac{1}{36}$$

Exercice 7 : Factoriser les expressions suivantes :

$$1. A = 3(x-1)^2 - (7x+1)(x-1) = (x-1)(3(x-1) - (7x+1)) = (x-1)(3x-3-7x-1) = (x-1)(-4x-4) = -4(x-1)(x+1)$$

$$2. \text{ On ne voit pas de facteur commun, donc on fait apparaître la forme } a^2 - b^2$$

$$B = (x+2)^2 - 49(5-x)^2 = (x+2)^2 - (7(5-x))^2 = ((x+2) + (35-7x))((x+2) - (35-7x)) = (37-6x)(8x-33)$$

$$3. C = (x+2)(6x-3) - (1-2x)^2 = (x+2) \times (-3)(1-2x) - (1-2x)^2 = (-3x-6)(1-2x) - (1-2x)^2 = (1-2x)((-3x-6) - (1-2x)) = (1-2x)(-x-7)$$

Équation de degré 1

Exercice 8 : Résoudre les équations suivantes :

$$1. 2x + 1 = 0 \iff 2x = -1 \iff x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$2. -2x + 2 = 4 \iff -2x = 2 \iff x = -1$$

$$\text{Donc } S = \{-1\}$$

$$3. 2 \ln x + 1 = 0 \iff \ln x = -\frac{1}{2} \iff x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^{1/2}}$$

$$\text{Donc } S = \left\{\frac{1}{e^{1/2}}\right\}$$

Équations de degré 2

Exercice 9 : Déterminer les solutions et factoriser.

$$1. x^2 + x - 1 = 0$$

$$\text{On trouve } \Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$$

$$\text{On calcule alors } x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Donc } S = \left\{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right\}$$

$$\text{On en déduit la forme factorisée : } x^2 + x - 1 = \left(x - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

2. $2x^2 + x + 1 = 0$

On trouve $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times 1 = -7 < 0$

Donc l'équation n'admet aucune solution réelle, $S = \emptyset$

On en déduit que l'expression n'est pas factorisable.

3. $x^2 + 2x + 1 = 0$.

On trouve $\Delta = 0$ puis $x_0 = -1$

Ainsi $S = \{-1\}$

On en déduit la forme factorisée : $x^2 + 2x + 1 = (x - (-1))^2 = (x + 1)^2$

Inéquation de degré 1

Exercice 10 : Résoudre les inéquations suivantes :

1. $2x + 1 \leq 0 \iff 2x \leq -1 \iff x \leq -\frac{1}{2}$

Ainsi, $S = \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right]$

2. $-2x + 2 > 4 \iff -2x > 2 \iff x < -1$

Ainsi, $S =]-\infty; -1[$

Inéquation de degré 2

Exercice 11 : Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x^2 + x - 1 \leq 0$

On a déjà déterminé les racines à l'exercice 9. Comme le coefficient dominant est positif, on en déduit que le polynôme est négatif à l'intérieur des racines.

Donc $S = \left[\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right]$

2. $2x^2 + x + 1 > 0$

On a vu que ce polynôme n'admet aucune racine, donc il est toujours du signe de $a = 2$, autrement dit il est toujours positif.

Donc $S = \mathbb{R}$

3. $x^2 + 2x + 1 \geq 0$

On a vu que ce polynôme admet une unique racine, il est donc toujours positif (du signe de a) et s'annule uniquement pour $x = -1$.

Donc $S = \mathbb{R}$

Dérivation

Exercice 12 : Dériver les fonctions définies par les formules suivantes.

1. $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$

$f'(x) = 6x - 4$

2. $f(x) = e^x + \ln(x) + \frac{1}{x}$

$f'(x) = e^x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

3. $f(x) = \frac{3x+1}{2x-5}$

$f'(x) = \frac{3(2x-5) - (3x+1)(2)}{(2x-5)^2} = \frac{-17}{(2x-5)^2}$

4. $f(x) = e^{3x+2}$

$f'(x) = 3e^{3x+2}$

5. $f(x) = \ln(x)(-2x+5)$

$f'(x) = \frac{1}{x}(-2x+5) + \ln(x)(-2) = \frac{-2x+5}{x} - 2\ln(x)$

$$6. \quad f(x) = e^{2x}(4x^2 - 5x)$$

$$f'(x) = 2e^{2x}(4x^2 - 5x) + e^{2x}(8x - 5) = e^{2x}(8x^2 - 10x + 8x - 5) = e^{2x}(8x^2 - 2x - 5)$$

$$7. \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 3} \qquad f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$8. \quad f(x) = \ln(5x + 7) \qquad f'(x) = \frac{5}{5x + 7}$$

$$9. \quad f(x) = \frac{e^{2x} + 4}{3(\ln x + 7x)} \qquad f'(x) = \frac{(2e^{2x})(3\ln(x) + 21x) - (e^{2x} + 4)(\frac{1}{x} + 7)}{3(\ln x + 7x)^2}$$