
CHAPITRE 2

LOGIQUE

1. Notion d'ensembles	2
1.1 Généralités sur les ensembles	2
1.2 Un cas particulier d'ensemble : les intervalles	2
1.3 Appartenance et inclusion	3
2. Quelques éléments de logique	3
2.1 Proposition	4
2.2 Quantificateurs	4
2.3 La négation et les connecteurs logiques	5
a. La négation « non »	5
b. La disjonction « ou » et la conjonction « et »	6
c. L'implication $\Rightarrow$ et l'équivalence $\Leftrightarrow$	6
3. Quelques exemples de raisonnements	8
3.1 Le raisonnement déductif	8
3.2 Le raisonnement par double implication	10
3.3 Le raisonnement par contraposée	10
3.4 Le raisonnement par l'absurde	11
3.5 Réfutation par un contre-exemple	11
TD	12
1. Logique	12
2. Raisonnements	12
3. Exercices d'approfondissement	13
4. En autonomie	14
5. Type DS ou concours	14
Bilan	15
1. Des erreurs à éviter	15
2. Des méthodes à retenir	15

Le but de ce chapitre est de découvrir quelques notations mathématiques usuelles et quelques raisonnements classiques qui vous permettront d'avoir une rédaction rigoureuse. Il faudra donc les mettre en pratique tout au long de l'année.

1. Notion d'ensembles

Tout d'abord, quand on définit un élément mathématique, il faut être précis quant au type d'élément dont on parle : s'agit-il d'un entier ? d'un réel ? d'un nombre pair ? d'une suite ? Autrement dit, on doit s'intéresser à l'ensemble auquel appartient l'élément.

Cette information est utile pour donner le domaine de définition d'une fonction (on ne peut pas prendre la racine carrée d'un nombre négatif) ou donner les solutions éventuelles d'une équation (les solutions ne seront pas les mêmes si on s'intéresse à des réels ou des entiers).

1.1 Généralités sur les ensembles

Définition 1 (Ensemble)

On appelle **ensemble** un groupement d'objets, eux-mêmes appelés les **éléments** de cet ensemble. On peut décrire un ensemble en donnant la liste de ses éléments ou en le définissant comme une partie d'un ensemble vérifiant une propriété.

Exemple 2 (d'ensembles) :

Définition 3 (Ensembles de nombres usuels)

- ✓ $\mathbb{N}$ désigne les **entiers naturels** :
- ✓ $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des **entiers relatifs** :
- ✓ $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des **nombres rationnels** : ce sont les nombres qui peuvent s'écrire comme le quotient de deux entiers relatifs, autrement dit :
- ✓ $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des **nombres réels**. Ce sont les rationnels et les irrationnels (qui ne peuvent pas s'écrire comme le quotient de deux entiers) tels que ...

Proposition 4 (Des ensembles à connaître)

- ✓ L'ensemble ne contenant aucun élément est appelé l'**ensemble vide** et se note $\emptyset$.
- ✓ E^* désigne l'ensemble E privé de 0.
- ✓ E_+ désigne l'ensemble des nombres positifs de E .
- ✓ E_- désigne l'ensemble des nombres négatifs de E .

Exemple 5 :

1.2 Un cas particulier d'ensemble : les intervalles

Certains ensembles sont des **intervalles** tels que $]1, 5] = \{x \in \mathbb{R}, 1 < x \leq 5\}$ ou $[3, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq 3\}$.

Définition 6 (Intervalles ouverts et fermés)

Soient a et b des réels tels que $a < b$.

✓ On appelle **intervalle ouvert** tout intervalle de $\mathbb{R}$ de l'une des formes suivantes :

$$]a, b[, \quad]a, +\infty[, \quad]-\infty, a[, \quad \mathbb{R}, \quad \emptyset.$$

✓ On appelle **intervalle fermé** tout intervalle de $\mathbb{R}$ de l'une des formes suivantes :

$$[a, b], \quad [a, +\infty[, \quad]-\infty, a], \quad \mathbb{R}, \quad \emptyset.$$

Remarque 7 :

1. En particulier, $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont des intervalles ouverts et fermés.
2. Les intervalles de la forme $[a, b[$ et $]a, b]$ où $a < b$ sont parfois dits « semi-ouverts ».

Définition 8 (Intervalle d'entiers)

Si n et m sont deux entiers tels que $n \leq m$, on définit l'**intervalle d'entiers** $\llbracket n, m \rrbracket$ par

$$\llbracket n, m \rrbracket =$$

Exemple 9 : $\llbracket 1, 5 \rrbracket =$

Remarque 10 : Ne pas confondre $\{0, 1\}$ (seulement 0 et 1) et $]0 ; 1[$ (tous les réels entre 0 et 1).

1.3 Appartenance et inclusion**Définition 11 (Appartenance d'un élément à un ensemble)**

Soient E un ensemble et x un élément.

✓ $x \in E$ se lit :

✓ $x \notin E$ se lit :

Définition 12 (Inclusion d'un ensemble dans un autre)

Soient A et B deux ensembles.

- ✓ $A \subset B$ se lit « **A est inclus dans B** » et signifie que tout élément de A est un élément de B . On dit aussi que A est un sous-ensemble de B .
- ✓ $A \not\subset B$ se lit « **A n'est pas inclus dans B** » et signifie qu'au moins un élément de l'ensemble A n'appartient pas à l'ensemble B .

Remarque 13 : Ne confondez pas les notions d'inclusion et d'appartenance.

Un élémentun ensemble et un ensembleun autre ensemble.

Exemple 14 (d'utilisation des symboles précédents) :

1. $2 \in [-5 ; 4]$ et $10 \notin [-5 ; 4]$.
2. $[1 ; 2] \subset [1 ; 5]$ et $[0 ; 2] \subset [1 ; 5]$.
3. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

2. Quelques éléments de logique

Le but de cette partie est d'expliquer les outils qui vont servir à construire des raisonnements clairs et rigoureux. Lorsque vous voulez démontrer un résultat, vous allez énoncer des phrases (appelées propositions) qui correspondront aux différentes étapes que vous effectuez. Mais si vous voulez que votre démonstration soit compréhensible, il faudra aussi donner les liens logiques qui vous conduisent d'une étape à une autre (c'est que l'on appelle les connecteurs logiques).

2.1 Proposition

Définition 15 (Proposition)

Une **proposition** est une phrase $\mathcal{P}$ qui est soit vraie, soit fausse.

Remarque 16 : Lorsqu'une proposition $\mathcal{P}$ dépend d'une variable x , on la note parfois $\mathcal{P}(x)$. Si elle dépend d'une variable n , on la note $\mathcal{P}(n)$.

Exemple 17 :

1. « Il ne pleut pas » est une proposition mais « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3n + 1$ » n'est pas une proposition.
2. La phrase $\mathcal{P}$: « Lorsque je joue à pile ou face, j'ai une chance sur 2 de gagner » est une proposition. Est-elle vraie?
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $2n \geq 6$ ». La proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie si $n \geq 3$ et fausse sinon. Ainsi, $\mathcal{P}(3)$ est vraie, $\mathcal{P}(5)$ aussi mais $\mathcal{P}(1)$ est fausse.
La proposition $\mathcal{P}$: « pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n \geq 6$ » est fausse car cette inégalité n'est pas vérifiée pour n'importe quel entier n , prendre par exemple $n = 0$.
4. « La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante » est une proposition. Est-il légitime de la noter $\mathcal{P}(n)$?

Définition 18 (utile pour comprendre les mots clés du cours de mathématiques)

- ✓ Un **théorème** est une proposition vraie considérée comme importante, un **lemme** est une proposition intermédiaire utile à la démonstration d'une autre proposition et un **corollaire** est la conséquence d'une proposition ou d'un théorème.
- ✓ La **démonstration** d'une proposition est un processus respectant strictement les règles de la logique qui part d'hypothèses supposées vraies et qui aboutit à la conclusion attendue. La démonstration permet de prouver qu'une assertion est vraie.
- ✓ Une **conjecture** est une proposition dont on pense qu'elle est vraie sans l'avoir démontrée.

2.2 Quantificateurs

On se donne un ensemble E et une proposition $\mathcal{P}(x)$ qui peut être vraie ou fausse en fonction de la valeur de x , élément de E . Pour donner du sens à notre proposition, il va donc falloir préciser si cette proposition est vraie pour toutes les valeurs de E , pour au moins une valeur ou exactement une valeur à l'aide d'outils que l'on appelle des quantificateurs.

Définition 19 (Quantificateurs)

- ✓ Le symbole $\forall$ signifie « pour tout » ou « quel que soit » (quantificateur universel).
- ✓ Le symbole $\exists$ signifie « il existe (au moins) un » (quantificateur existentiel).
- ✓ Le symbole $\exists!$ signifie « il existe un unique ».

Remarque 20 : Les symboles $\forall$ et $\exists$ sont le A (pour « all » (tous en anglais)) et le E (pour « exists ») que l'on a retournés.

Exemple 21 :

- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$
- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 5x + 4 = 0$
- $\exists! x \in \mathbb{R}, x + 1 = 0$

Remarque 22 : On ne mélange pas du texte en français et des quantificateurs. Autrement dit, les quantificateurs ne doivent pas être utilisés à des fins d'abréviation.

Exercice 23 : Écrire les énoncés suivants avec des quantificateurs.

1. Il existe un unique réel x tel que $f(x)$ égale à zéro.
2. Pour tout nombre strictement positif x , il existe un nombre non nul dont le carré est strictement inférieur à x .

Remarque 24 : On peut permuter deux quantificateurs de même nature mais on ne peut pas intervertir des quantificateurs de types différents comme le montre l'exemple suivant.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{N}, x < y$ signifie : pour tout réel x , il existe un entier naturel y qui est strictement supérieur à x . Cette proposition est ...
2. $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x < y$ signifie : il existe un entier naturel y tel que pour tout réel x , y est strictement supérieur à x . Cette proposition est ...

Le quantificateur existentiel permet de définir les nombres pairs et impairs.

Définition 25 (Nombre pair, nombre impair)

Soit n un entier relatif.

1. n est un **nombre pair** (ou **entier pair**) s'il existe un entier relatif k tel que $n = 2k$.
2. n est un **nombre impair** (ou **entier impair**) s'il existe un entier relatif k tel que $n = 2k + 1$.

2.3 La négation et les connecteurs logiques**a. La négation « non »****Définition 26 (Négation non $\mathcal{P}$)**

Soit $\mathcal{P}$ une proposition. La **négation de $\mathcal{P}$** , notée $\text{non } \mathcal{P}$, est la proposition qui dit le contraire de $\mathcal{P}$. La proposition $\text{non } \mathcal{P}$ est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse, et fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie.

Exemple 27 :

1. On lance un dé trois fois. La négation de « tous les numéros obtenus sont pairs » est
2. La négation de « $\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 = 2$ » est

Proposition 28 (Négation et quantificateurs)

1. La négation « change » les quantificateurs (mais pas les ensembles) :
 - ✓ la négation de $(\forall x \in E, \mathcal{P}(x))$ est $(\exists x \in E, \text{non } \mathcal{P}(x))$;
 - ✓ la négation de $(\exists x \in E, \mathcal{P}(x))$ est $(\forall x \in E, \text{non } \mathcal{P}(x))$.
2. La négation de $\text{non } \mathcal{P}$ est $\mathcal{P}$.

b. La disjonction « ou » et la conjonction « et »**Définition 29 (Disjonction $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$)**

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. La **disjonction de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$** , notée $(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q})$, est la proposition qui est vraie lorsqu' (au moins) une des deux propositions $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ est vraie. Autrement dit, $\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}$ est vraie lorsque soit $\mathcal{P}$ est vraie, soit $\mathcal{Q}$ est vraie, soit les deux sont vraies.

Remarque 30 : Le « ou » mathématique est **inclusif** : une seule des propositions peut être vraie, ou les deux à la fois. À l'inverse, le « ou » du langage courant est en général **exclusif** : il marque l'alternative, c'est l'un ou l'autre mais pas les deux (par exemple, « fromage ou dessert »).

Exemple 31 : On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6. Soient $\mathcal{P}$: « le numéro obtenu est pair » et $\mathcal{Q}$: « le numéro obtenu est inférieur ou égal à 4 ». $(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q})$ est la proposition

Définition 32 (Conjonction $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$)

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. La **conjonction de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$** , notée $(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q})$, est la proposition qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont toutes les deux vraies.

Exemple 33 : On reprend l'exemple précédent. $(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q})$ est la proposition

Proposition 34

Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ trois propositions.

1. Distributivité :

$$(a) \mathcal{P} \text{ et } (\mathcal{Q} \text{ ou } \mathcal{R}) \equiv (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) \text{ ou } (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{R})$$

$$(b) \mathcal{P} \text{ ou } (\mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{R}) \equiv (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \text{ et } (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{R})$$

2. Lois de Morgan :

$$(a) \text{ non } (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \equiv \text{ non } \mathcal{P} \text{ et non } \mathcal{Q}$$

$$(b) \text{ non } (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) \equiv \text{ non } \mathcal{P} \text{ ou non } \mathcal{Q}$$

Exemple 35 : Quelle est la négation de $\mathcal{P}$: « $2 \leq x \leq 3$ » ?

c. L'implication $\Rightarrow$ et l'équivalence $\Leftrightarrow$

Ce sont des symboles que nous avons déjà utilisés dans le chapitre précédent pour la résolution d'(in)équations. Il faut savoir les utiliser à bon escient.

Définition 36 (Implication et équivalence)

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

1. Implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$: si la proposition $\mathcal{P}$ est vraie alors la proposition $\mathcal{Q}$ l'est aussi.

2. Implication réciproque $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ ou $\mathcal{P} \Leftarrow \mathcal{Q}$: c'est exactement la même chose mais dans le sens inverse.

3. Equivalence $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$: on a à la fois $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$. Dans ce cas, on dit aussi que $\mathcal{P}$ est vraie **si et seulement si** $\mathcal{Q}$ est vraie.

4. Contraposée $\text{non } \mathcal{Q} \Rightarrow \text{non } \mathcal{P}$: c'est équivalent à $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

Remarque 37 :

- ✓ L'implication correspond à un DONC. On a $\mathcal{P}$ donc on a $\mathcal{Q}$ (en admettant que $\mathcal{P}$ soit vraie).
- ✓ La réciproque correspond à un CAR. On a $\mathcal{P}$ car on a $\mathcal{Q}$ (en admettant que $\mathcal{Q}$ soit vraie).
- ✓ Dans les raisonnements, vous pourrez aussi utiliser le mot-clé OR, pour lequel il n'existe pas de symbole. Cela marque l'apport d'une idée qui n'a pas de lien logique avec ce qui précède mais qui est nécessaire pour la suite.

Définition 38 (Condition nécessaire et condition suffisante)

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

1. Quand $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ est une **condition suffisante de $\mathcal{Q}$** et $\mathcal{Q}$ est une **condition nécessaire de $\mathcal{P}$** .
2. Quand $\mathcal{P}$ est équivalente à $\mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ est une **condition nécessaire et suffisante de $\mathcal{Q}$** .

Exemple 39 : Dans cet exemple, on note x un nombre réel. Compléter avec le symbole adéquat $\iff$, $\implies$ ou $\impliedby$.

- | | |
|--|------------------------------------|
| 1. $(x = 3) \dots\dots (x^2 = 9)$ | 3. $(x > 3) \dots\dots (x^2 > 9)$ |
| 2. $(x^2 = 9) \dots\dots (x = 3 \text{ ou } x = -3)$ | 4. $(x < -3) \dots\dots (x^2 > 9)$ |

Remarque 40 (Sens des implications) : Il faut faire attention au sens des implications! En effet, l'implication $\forall x \in \mathbb{R}, (x = x^2) \implies (x \geq 0)$ est vraie, mais l'implication réciproque est fausse.

Exercice 41 : Donner la réciproque des assertions suivantes et dire si elles sont vraies.

- | | |
|--|--|
| 1. $\forall x \in \mathbb{R}, x = 2 \implies x^2 = 4.$ | 2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \geq 0 \text{ et } y \geq 0) \implies xy \geq 0.$ |
|--|--|

Exercice 42 : Donner la contraposée des assertions suivantes et dire si elles sont vraies.

- | | |
|---|--|
| 1. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 5) \implies (n > 3).$ | 2. $\forall n \in \mathbb{N}, (n < 1) \implies (n \text{ divise } 2).$ |
|---|--|

Exercice 43 : Utiliser des connecteurs logiques pour traduire les énoncés suivants :

1. La compétition sera annulée si et seulement si il pleut ou il neige.
2. La présence d'au moins 10 personnes est une condition nécessaire et suffisante pour que la séance ait lieu.
3. Si Pierre est allé au magasin alors nous avons des œufs, et s'il n'est pas allé au magasin alors nous n'avons pas d'œufs.

Proposition 44 (Négation)

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

1. **Négation de l'implication** : $\text{non } (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \equiv (\mathcal{P} \text{ et non } \mathcal{Q})$.
2. **Implication** : $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \equiv ((\text{non } \mathcal{P}) \text{ ou } \mathcal{Q})$.

Exemple 45 : Écrire la négation de $\forall x \in \mathbb{R}, (x = x^2) \Rightarrow (x \geq 0)$.

3. Quelques exemples de raisonnements

Dans cette section, nous allons décrire différentes façons d'organiser une démonstration. Plusieurs types de questions peuvent se poser et l'énoncé n'est pas toujours explicite. Il faudra d'abord comprendre si on vous demande de prouver un résultat ou si l'on vous demande s'il est vrai. Ensuite, vous devrez vous demander si vous êtes en présence d'une implication ou d'une équivalence.

3.1 Le raisonnement déductif

C'est le raisonnement le plus naturel : on va enchaîner les idées par une succession d'implications ou d'équivalences en y adjoignant éventuellement des « ou ». Les idées de départ sont des hypothèses que l'on sait ou que l'on suppose vraies. À l'arrivée, on trouve la conclusion, c'est-à-dire ce que l'on veut montrer.

Méthode 46 (Pour montrer un « quel que soit » ou un « il existe »)

Pour prouver une proposition de la forme « $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ » on commence par écrire « Soit $x \in E$ ». On prouve ensuite que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour ce x . Comme x a été choisi arbitrairement dans E , le raisonnement est valable pour tout $x \in E$.

Si l'on veut montrer une proposition de la forme « $\exists x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ », il suffit d'exhiber un tel x . On trouve donc un **exemple** explicite : une valeur numérique qui vérifie la propriété

Exemple 47 : Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que si $x < 1$, alors $(x - 5)^2 > 16$.

Exemple 48 : Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $x > 3 \iff \ln(e^{x-2} + 1) > \ln(1 + e)$.

Exemple 49 : Montrer que $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq 0$.

Exemple 50 : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \geq 0$.

Méthode 51 (Raisonnement par disjonction de cas)

C'est un raisonnement utile lorsqu'il y a un petit nombre de cas possibles sur la variable conduisant à des résultats différents (par exemple, pair et impair, positif et négatif, ...). On peut ensuite utiliser le raisonnement déductif sur chaque cas.

Exemple 52 : Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, n(n + 1)$ est pair.

3.2 Le raisonnement par double implication

Il n'est pas toujours possible de prouver une équivalence directement. Dans ce cas-là, on utilisera :

Méthode 53 (Raisonnement par double implication)

Pour prouver $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$, on raisonnera parfois par double implication : on montre séparément $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$.

Exemple 54 : Montrer que pour tous x et y réels, $x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0$.

3.3 Le raisonnement par contraposée

Méthode 55 (Raisonnement par contraposée)

Lorsque le raisonnement direct ne fonctionne pas pour montrer que $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, on peut tester le raisonnement par contraposée et montrer que $\text{non } \mathcal{Q} \Rightarrow \text{non } \mathcal{P}$.

Exemple 56 : Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \notin \mathbb{Q} \implies 1 + x \notin \mathbb{Q}$.

Exemple 57 : Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est impair, alors n est impair par contraposée.

3.4 Le raisonnement par l'absurde

Méthode 58 (Raisonnement par l'absurde)

Si le raisonnement direct ne fonctionne pas, on peut supposer que $(\mathcal{P}$ et non $\mathcal{Q}$) est vraie et montrer que l'on aboutit à quelque chose d'absurde.

Une fois arrivé à une incohérence, on a donc prouvé que $\mathcal{P}$ et non $\mathcal{Q}$ est fausse. Or, $\mathcal{P}$ et non $\mathcal{Q}$ est la négation de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$. Ainsi, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie.

Exemple 59 : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $\frac{x+1}{x+2} \neq 1$.

3.5 Réfutation par un contre-exemple

Lorsqu'on se demande si une proposition donnée est vraie ou fausse, on commence par tester pour des petites valeurs de variables. Si l'on trouve une valeur qui « ne fonctionne pas », alors la proposition est fausse. Sinon, on peut commencer à penser que la proposition est vraie et passer en revue les méthodes précédentes pour le prouver.

On retiendra en particulier :

Méthode 60 (Montrer qu'une proposition est fausse)

Pour montrer qu'une proposition commençant par « quel que soit » ou « pour tout » est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple.

Exemple 61 : La proposition « $\forall x < 2, x^2 < 4$ » est-elle vraie ou fausse?

TD

1. Logique

☀ **Exercice 1** (Écrire avec des quantificateurs) : Écrire de manière plus formelle les propositions suivantes (c'est-à-dire avec des quantificateurs) :

1. La fonction f est l'identité sur $\mathbb{R}$.
2. f est positive sur $\mathbb{R}_+$.
3. f s'annule sur $\mathbb{R}$.
4. f s'annule sur $[0, 1]$.
5. f est nulle sur $\mathbb{R}$.
6. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
7. La suite (u_n) est décroissante.
8. Tout réel possède une racine carrée dans $\mathbb{R}$.
9. f ne s'annule jamais.
10. f n'est pas positive.
11. f est majorée par 5.
12. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est constante.
13. f est de signe constant sur $\mathbb{R}$.

☀ **Exercice 2** (Écrire avec des quantificateurs et des connecteurs) : Écrire avec les quantificateurs et connecteurs appropriés les propositions suivantes :

1. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Si la somme de deux entiers naturels est nulle, alors ces deux entiers sont nuls.
3. Il existe un unique réel x tel que $\exp(x) = 1$.
4. La fonction polynomiale P définie par $P(x) = x^2 + 1$ ne possède pas de racine réelle.

☀ **Exercice 3** (Négation et connecteurs logiques) : Soient A, B et C trois propositions. Donner la négation des assertions suivantes :

1. A ou (B et C)
2. A et (B ou C)
3. $A \Rightarrow \text{non}(B)$
4. $A \Rightarrow B$
5. $\text{non}(A \text{ ou } B) \Rightarrow C$
6. $(A \text{ et } B) \Rightarrow \text{non}(C)$

☀ **Exercice 4** : Dire si les propositions sont vraies ou fausses puis nier celles qui sont fausses.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x = \ln(e^x)$
2. $\exists x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} = -x$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} = -x$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, (x+2)^2 = x^2 + 4$
5. $\exists x \in \mathbb{R}, (x+2)^2 = x^2 + 4$
6. $\forall x \in \mathbb{N}^*, \exists y \in \mathbb{R}, 0 < x \leq y$
7. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \neq y) \Rightarrow x^2 \neq y^2$

☀ **Exercice 5** : Parmi ces quatre propositions, dire lesquelles sont vraies et donner la négation de chacune des propositions.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \text{ tel que } x + y > 0$
3. $\exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \text{ tels que } x + y > 0$

☀ **Exercice 6** (Comprendre le français) : Parmi les propriétés suivantes, déterminer celles qui sont équivalentes entre elles.

1. S'il pleut ou s'il neige, la compétition est annulée.
2. Si la compétition n'est pas annulée, alors il ne neige pas ni ne pleut.
3. Si la compétition est annulée, alors il pleut ou il neige.
4. S'il pleut alors la compétition est annulée, et s'il neige alors la compétition est annulée.
5. S'il ne neige pas ni ne pleut, alors la compétition n'est pas annulée.

2. Raisonnements

☀ **Exercice 7** : Montrer que si $x < 1$ alors $(x-4)^2 + 3 > 12$.

☀ **Exercice 8 :** Soient deux réels a et b . Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}, a \times 2^n + b \times 3^n = 0) \iff (a = b = 0).$$

☀ **Exercice 9 :** Montrer que pour tous réels x et y , $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.

☼ **Exercice 10 :** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{x^2 + 1} \geq 0$.

☀ **Exercice 11 :** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + 1$. Montrer que f garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $m = 0$.

☼ **Exercice 12** (Par l'absurde) : Soient a, b, c trois réels tels que $a + b + c = 1$. Montrer que l'un de ces nombres est supérieur ou égal à $\frac{1}{3}$.

☼ **Exercice 13** (Irrationalité de $\sqrt{2}$) : Supposons qu'il existe p et q deux entiers avec $q \geq 1$ tels que $\sqrt{2}$ s'écrive $\frac{p}{q}$ de façon irréductible.

1. Montrer que p^2 est pair, puis que p est pair.
2. En déduire que q est pair.
3. Conclure.

☼ **Exercice 14 :** Montrer que si $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.

☀ **Exercice 15 :** Est-il vrai que $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$?

3. Exercices d'approfondissement

☼ **Exercice 16** (Un autre exemple de raisonnement) : Le but de cet exercice est de déterminer, si elles existent, toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, et vérifiant la condition suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Pour cela nous allons utiliser un type de raisonnement appelé *analyse-synthèse*. Celui-ci utilise deux étapes :

- *Analyse*. On suppose qu'une fonction vérifie la condition demandée et on analyse les propriétés qui en découlent. On va arriver à une expression explicite de la fonction f
- *Synthèse*. On part cette fois de l'expression obtenue pour montrer qu'elle vérifie bien la condition demandée. Cette étape est indispensable pour montrer qu'on a bien obtenu une solution.

1. Analyse : considérons f une telle fonction.
 - (a) En donnant à x et y des valeurs particulières, donner les seules valeurs possibles de $f(0)$.
 - (b) En donnant à x et y d'autres valeurs particulières, justifier que $f(0)$ vaut nécessairement 1.
 - (c) En donnant à y seulement une certaine valeur, donner l'expression de $f(x)$ pour tout réel x .
2. Synthèse : conclure quant au but de l'exercice.

☼ **Exercice 17** (Récurrence) : **Le raisonnement par récurrence sera travaillé au chapitre 5. Voici un exercice pour en réviser le principe, si vous vous souvenez de la méthode.**

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}u_n$ pour $n \geq 0$.
 - (a) Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{2n} + 2$ est divisible par 3.

4. En autonomie

  **Exercice 18** (Manipuler des expressions logiques) : On considère E un intervalle de $\mathbb{R}$ et les propositions suivantes :

$$A : (\forall x \in E, x \geq 2) \quad B : (\exists x \in E, x > 1) \quad C : (\forall x \in E, \exists y \in E, x + y = 2)$$

1. Nier les propositions A , B et C .
2. On considère dans cette question $E = [0, 4]$. Donner, en la justifiant, la valeur de chacune des propositions A , B et C .
3. Même question avec l'intervalle $E = [-1, 3]$.

  **Exercice 19** (Tester des propositions) : Dire si ces propositions sont vraies.

1. Pour que le produit de deux réels soit positif, il suffit que ces réels soient positifs.
2. Il est nécessaire que $x > 0$ pour que $2x + 3 > 0$.
3. Pour que $x = 2$, il faut que $x^2 = 4$.

  **Exercice 20** (Prouver une proposition) : Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $x \geq 1 \iff \frac{\sqrt{x}-1}{x} \geq 0$.

  **Exercice 21** (Prouver une proposition) : Soit a un réel positif. Prouver l'équivalence :

$$(a = 0) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, a \leq \varepsilon)$$

  **Exercice 22** (Prouver une proposition) : Soient $a_1, \dots, a_9$ des nombres réels rangés dans l'ordre croissant tels que

$$a_1 + \dots + a_9 = 90.$$

Montrer qu'il existe trois de ces nombres dont la somme est supérieure ou égale à 30.

  **Exercice 23** (Prouver une proposition) :

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer que si $a \leq b$ alors $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ et que $a \leq \sqrt{ab} \leq b$. 
2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $b \neq 0$ alors $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (On utilisera que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

  **Exercice 24** (Raisonnement) : La proposition suivante est-elle vraie ?
Pour tous réels x et y , $x \leq y \iff x^2 \leq y^2$.

5. Type DS ou concours

 **Exercice 25** (Étude d'une suite définie par une somme) : *Prérequis : utilisation du signe somme $\sum$, récurrence.*
Soit (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

On se propose d'exprimer u_n en fonction de n par deux méthodes différentes :

1. **Première méthode : conjecture et récurrence.**
 - (a) Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3 .
 - (b) Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n .
 - (c) Démontrer ce résultat par récurrence.
2. (a) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

- (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Indication. Utiliser l'expression obtenue pour la réintroduire dans la somme. Expliciter les premiers termes et les derniers termes de la somme obtenue.

3. **Comparaison des deux méthodes :**

Vérifier que les expressions obtenues avec la méthode 1 et la méthode 2 sont égales.

Bilan

1. Des erreurs à éviter

- ✓ **Il faut être précis dans ses notations.** Dès qu'on introduit une nouvelle variable, on précise son ensemble de définition. L'absence de précision peut conduire à un non-sens.
- ✓ **Il faut faire attention à l'ordre des quantificateurs.** s'ils ne sont pas de même nature, cela change le sens de la proposition. On n'échange donc que des quantificateurs semblables. ► Cours : rem 24
- ✓ **Négation d'une double inégalité.** Pour des nombres x, y, z dans un ensemble E , la négation de $x < z < y$ est $x \leq z$ ou $z \leq y$. Pour l'obtenir, décomposer : $x < z < y \iff x < z$ et $z < y$. En passant à la négation, le « et » devient « ou ». ► Cours : ex 35
- ✓ **Implication et équivalence.** On retiendra en particulier que lorsqu'on passe au carré dans une inégalité, on a une implication, pas une équivalence (on peut « perdre » les signes en passant au carré) . ► Cours : ex 39
- ✓ **Contraposée et négation d'une implication.** Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ des propositions.
La contraposée de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est $\text{non } \mathcal{Q} \Rightarrow \text{non } \mathcal{P}$: on inverse l'ordre. ► Cours : def 36 - ex 42
Il ne faut pas la confondre avec la négation de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ qui est $\mathcal{P}$ et $\text{non } \mathcal{Q}$ (à bien retenir pour le raisonnement par l'absurde). ► Cours : prop 44 - ex 45; TD : exo 3
- ✓ **Raisonnement par l'absurde.** Faire particulièrement attention à ce raisonnement : si le but est de montrer que $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, il faut supposer sa négation c'est-à-dire $\mathcal{P}$ et $\text{non } \mathcal{Q}$ (cf proposition 44) et pas autre chose de farfelu! (Je me répète mais c'est pour essayer de vous éviter cette erreur.) ► Cours : méthode 58 - ex 59

2. Des méthodes à retenir

- ✓ **Montrer qu'une proposition est fausse.** Quand on veut montrer qu'un résultat est faux, on a vu que l'on pouvait donner un contre-exemple. Quelques précisions :
 - Pour montrer qu'un " $\forall x \in E$ " est faux, il suffit de trouver un $x \in E$ pour lequel la proposition est fausse.
► Cours : ex 61; TD : exo 15
 - Par contre, pour montrer qu'un " $\exists x \in E$ " est faux, il faut montrer que cela ne marche pour AUCUN x . Un exemple ne suffira donc pas.
- ✓ **Montrer qu'une proposition est vraie.** On cherche la méthode la plus adaptée. Si elle ne fonctionne pas, on change de méthode.
 - Pour montrer une implication, on peut commencer par un raisonnement direct.
► Cours : ex 47; TD : exo 7
La disjonction de cas est un raisonnement à utiliser quand il y a un petit nombre de cas à traiter comme par exemple n pair et n impair ou encore $x \geq 0$ et $x < 0$.
► Cours : ex 52; TD : exo 9 - 10
Si le raisonnement direct ne fonctionne pas, vous pouvez tester le raisonnement par contraposée ou celui par l'absurde (cf plus haut). On se rappellera que si le raisonnement par contraposée fonctionne alors celui par l'absurde fonctionnera aussi.
► Cours : ex 56 - 57 - 59; TD : exo 12 - 13 - 14
 - Pour montrer une équivalence, soit on y arrive directement, soit on utilise la double implication (ce qui est souvent le mieux).
► Cours : ex 48 - 54; TD : exo 8
- ✓ **Savoir manipuler les expressions logiques** en appliquant les formules de négation et de distributivité ► Prop. 28, Prop. 34, Prop. 44

