
CHAPITRE 2

LOGIQUE - CORRECTION

1. Logique	1
2. Raisonnements	4
3. Exercices d'approfondissement	7
4. En autonomie	10
5. Type DS ou concours	13

1. Logique

☀ **Exercice 1** (Écrire avec des quantificateurs) : Écrire de manière plus formelle les propositions suivantes (c'est-à-dire avec des quantificateurs) :

- | | |
|--|--|
| 1. La fonction f est l'identité sur $\mathbb{R}$. | 8. Tout réel possède une racine carrée dans $\mathbb{R}$. |
| 2. f est positive sur $\mathbb{R}_+$. | 9. f ne s'annule jamais. |
| 3. f s'annule sur $\mathbb{R}$. | 10. f n'est pas positive. |
| 4. f s'annule sur $[0, 1]$. | 11. f est majorée par 5. |
| 5. f est nulle sur $\mathbb{R}$. | 12. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est constante. |
| 6. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. | 13. f est de signe constant sur $\mathbb{R}$. |
| 7. La suite (u_n) est décroissante. | |

1. La fonction f est l'identité sur $\mathbb{R}$.
 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$
2. f est positive sur $\mathbb{R}_+$.
 $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \geq 0$
3. f s'annule sur $\mathbb{R}$.
 $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$
4. f s'annule sur $[0, 1]$.
 $\exists x \in [0; 1]$ tel que $f(x) = 0$
5. f est nulle sur $\mathbb{R}$.
 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$
6. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y, f(x) < f(y)$
7. La suite (u_n) est décroissante.
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$
8. Tout réel possède une racine carrée dans $\mathbb{R}$.
 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $y^2 = x$
9. f ne s'annule jamais.
 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$
10. f n'est pas positive.
 $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) < 0$
11. f est majorée par 5.
 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 5$
12. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est constante :
 $\exists b \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = b$
Autre solution : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)$
13. f est de signe constant sur $\mathbb{R}$.
 $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0)$

 **Exercice 2** (Écrire avec des quantificateurs et des connecteurs) : Écrire avec les quantificateurs et connecteurs appropriés les propositions suivantes :

1. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Si la somme de deux entiers naturels est nulle, alors ces deux entiers sont nuls.
3. Il existe un unique réel x tel que $\exp(x) = 1$.
4. La fonction polynomiale P définie par $P(x) = x^2 + 1$ ne possède pas de racine réelle.

1. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
 $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$
Autre solution : $\exists M \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, m \leq f(x) \leq M$
2. Si la somme de deux entiers naturels est nulle, alors ces deux entiers sont nuls.
 $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, n + m = 0 \Rightarrow (n = 0 \text{ et } m = 0)$
3. Il existe un unique réel x tel que $\exp(x) = 1$.
 $\exists! x \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(x) = 1$
4. La fonction polynomiale P définie par $P(x) = x^2 + 1$ ne possède pas de racine réelle.
 $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$

 **Exercice 3** (Négation et connecteurs logiques) : Soient A, B et C trois propositions. Donner la négation des assertions suivantes :

- | | | |
|------------------|----------------------------------|--|
| 1. A ou (B et C) | 3. $A \Rightarrow \text{non}(B)$ | 5. $\text{non}(A \text{ ou } B) \Rightarrow C$ |
| 2. A et (B ou C) | 4. $A \Rightarrow B$ | 6. $(A \text{ et } B) \Rightarrow \text{non}(C)$ |

1. $\text{non}(A \text{ ou } (B \text{ et } C)) = \text{non } A \text{ et } (\text{non } B \text{ ou } \text{non } C)$
2. $\text{non}(A \text{ et } (B \text{ ou } C)) = \text{non } A \text{ ou } (\text{non } B \text{ et } \text{non } C)$

3. $\text{non} (A \Rightarrow \text{non}(B)) = A \text{ et } B$ **On retient que $\text{non}(\text{non } B) = B$**
4. $\text{non} (A \Rightarrow B) = A \text{ et } (\text{non } B)$
5. $\text{non} (\text{non} (A \text{ ou } B) \Rightarrow C) = \text{non} (A \text{ ou } B) \text{ et } \text{non} (C) = \text{non } A \text{ et } \text{non } B \text{ et } \text{non } C$
6. $\text{non} ((A \text{ et } B) \Rightarrow \text{non}(C)) = (A \text{ et } B) \text{ et } \text{non} (\text{non } C) = A \text{ et } B \text{ et } C$

☀ **Exercice 4 :** Dire si les propositions sont vraies ou fausses puis nier celles qui sont fausses.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x = \ln(e^x)$
2. $\exists x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} = -x$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} = -x$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, (x+2)^2 = x^2 + 4$
5. $\exists x \in \mathbb{R}, (x+2)^2 = x^2 + 4$
6. $\forall x \in \mathbb{N}^*, \exists y \in \mathbb{R}, 0 < x \leq y$
7. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \neq y) \Rightarrow x^2 \neq y^2$

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x = \ln(e^x)$ est vraie.
2. $\exists x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} = -x$ est vraie (il suffit de prendre 0)
3. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} = -x$ est fausse. Contre-exemple : pour $x = 1$ on a $\sqrt{x} = 1$ mais $-x = -1$.
Négation : $\exists x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} \neq -x$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, (x+2)^2 = x^2 + 4$ est fausse. Contre-exemple : prendre $x = 1$
Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, (x+2)^2 \neq x^2 + 4$
5. $\exists x \in \mathbb{R}, (x+2)^2 = x^2 + 4$ est vraie (prendre $x = 0$)
6. $\forall x \in \mathbb{N}^*, \exists y \in \mathbb{R}, 0 < x \leq y$ est vraie ($y = x + 1$ convient)
7. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \neq y) \Rightarrow x^2 \neq y^2$ est fausse. Sa négation est donc vraie :
 $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq y$ et $x^2 = y^2$
Contre-exemple : $x = -2$ et $y = 2$

☀ **Exercice 5 :** Parmi ces quatre propositions, dire lesquelles sont vraies et donner la négation de chacune des propositions.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y > 0$
3. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tels que $x + y > 0$

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ est fausse. Sa négation est $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y \leq 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y > 0$ est vraie. Sa négation est $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$
3. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ est fausse. Sa négation est $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y \leq 0$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tels que $x + y > 0$ est vraie. Sa négation est $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$

☀ **Exercice 6** (Comprendre le français) : Parmi les propriétés suivantes, déterminer celles qui sont équivalentes entre elles.

1. S'il pleut ou s'il neige, la compétition est annulée.
2. Si la compétition n'est pas annulée, alors il ne neige pas ni ne pleut.

3. Si la compétition est annulée, alors il pleut ou il neige.
4. S'il pleut alors la compétition est annulée, et s'il neige alors la compétition est annulée.
5. S'il ne neige pas ni ne pleut, alors la compétition n'est pas annulée.

Les propositions 1, 2 et 4 sont équivalentes (on remarque que la proposition 2 est la contraposée de la proposition 1).

Les propositions 3 et 5 sont équivalentes (elles sont contraposées l'une de l'autre. On remarque aussi que la proposition 3 est la réciproque de la 1, et la proposition 5 est la réciproque de la 2).

2. Raisonnements

☀ **Exercice 7 :** Montrer que si $x < 1$ alors $(x - 4)^2 + 3 > 12$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned} x < 1 &\iff x - 4 < -3 \\ &\implies (x - 4)^2 > 9 \quad \text{on utilise la décroissance de la fonction carré sur } \mathbb{R}_- \\ &\iff (x - 4)^2 + 3 > 12 \end{aligned}$$

Ce qui permet de prouver que $\boxed{\text{si } x < 1 \text{ alors } (x - 4)^2 + 3 > 12}$

☀ **Exercice 8 :** Soient deux réels a et b . Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}, a \times 2^n + b \times 3^n = 0) \iff (a = b = 0).$$

Démonstration de l'implication directe.

$$\forall n \in \mathbb{N}, a \times 2^n = b \times 3^n \implies (a \times 2 + b \times 3 = 0) \text{ et } (a + b = 0) \quad \text{on a appliqué la proposition aux cas } n = 0 \text{ et } n = 1 \\ \implies (a = 0) \text{ et } (b = 0)$$

Ce qui permet de démontrer l'implication directe $(\forall n \in \mathbb{N}, a \times 2^n + b \times 3^n = 0) \implies (a = b = 0)$.

Démonstration de la réciproque.

$$a = b = 0 \implies a \times 2^n + b \times 3^n = 0 \times 2^n + 0 \times 3^n = 0$$

Ce qui permet de démontrer l'implication réciproque $(a = b = 0) \implies (\forall n \in \mathbb{N}, a \times 2^n + b \times 3^n = 0)$

On peut donc conclure que $\boxed{(a = b = 0) \iff (\forall n \in \mathbb{N}, a \times 2^n + b \times 3^n = 0)}$

☀ **Exercice 9 :** Montrer que pour tous réels x et y , $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.

Pour déterminer la valeur de $\max(x, y)$, nous allons distinguer deux cas.

Cas 1. $x \geq y$

On a alors $\max(x, y) = x$. De plus, $x - y \geq 0$, donc $|x - y| = x - y$.

On a donc $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + x - y) = x$.

On en déduit que $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$

Cas 2. $x < y$

On a alors $\max(x, y) = y$. De plus, $x - y < 0$, donc $|x - y| = -x + y$.

On a donc $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y - x + y) = y$.

On en déduit que $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$

On peut donc conclure que pour tous réels, x et y , on a $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.

☀ **Exercice 10 :** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{x^2 + 1} \geq 0$.

Attention, dans l'expression donnée $x + \sqrt{x^2 + 1}$ on a bien $\sqrt{x^2 + 1} \geq 0$, mais x peut être négatif. La propriété n'est donc pas immédiate!

Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque que

$$x + \sqrt{x^2 + 1} \geq 0 \iff \sqrt{x^2 + 1} \geq -x$$

C'est cette propriété que nous allons démontrer.

De plus, on a $x^2 + 1 \geq x^2$.

Par croissance de la fonction racine carrée, on en déduit que $\sqrt{x^2 + 1} \geq \sqrt{x^2}$.

Cas 1. $x \geq 0$. On a alors $\sqrt{x^2} = x$. De plus, $x \geq -x$ car x est positif et $-x$ est négatif.

On a donc $\sqrt{x^2} \geq -x$.

Cas 2. $x < 0$. On a alors $\sqrt{x^2} = -x$. Par conséquent, $\sqrt{x^2} \geq -x$.

Dans ces deux cas on obtient donc $\sqrt{x^2 + 1} \geq -x$

On peut donc conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{x^2 + 1} \geq 0$

☀ **Exercice 11 :** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + 1$. Montrer que f garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $m = 0$.

Sens réciproque. On suppose $m = 0$. Alors la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1$. Elle est donc de signe constant.

Sens direct. Supposons que f soit de signe constant sur $\mathbb{R}$. On sait que si $m \neq 0$, alors f change de signe en $x = -\frac{1}{m}$ ce qui contredit notre hypothèse. On en déduit que $m = 0$.

Nous avons prouvé les deux implications, ce qui permet de conclure que f est de signe constant sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $m = 0$.

☀ **Exercice 12** (Par l'absurde) : Soient a, b, c trois réels tels que $a + b + c = 1$. Montrer que l'un de ces nombres est supérieur ou égal à $\frac{1}{3}$.

Soient a, b et c trois réels tels que $a + b + c = 1$.

Par l'absurde, supposons qu'aucun des nombres a, b et c ne soit supérieur à $\frac{1}{3}$. Autrement dit, on a $a < \frac{1}{3}$, $b < \frac{1}{3}$, et $c < \frac{1}{3}$.

En additionnant ces 3 inégalités on trouve $a + b + c < 1$, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

☀ **Exercice 13** (Irrationalité de $\sqrt{2}$) : Supposons qu'il existe p et q deux entiers avec $q \geq 1$ tels que $\sqrt{2}$ s'écrive $\frac{p}{q}$ de façon irréductible.

1. Montrer que p^2 est pair, puis que p est pair.
2. En déduire que q est pair.
3. Conclure.

On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

On note bien qu'une fraction est irréductible si et seulement si son numérateur et son dénominateur n'ont aucun diviseur commun autre que 1. Le but de ce raisonnement par l'absurde est justement de montrer que dans ce cas, on peut trouver 2 comme diviseur commun à p et q .

1. On a :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \implies 2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \text{Attention : on a une implication directe mais pas d'équivalence.}$$

Dans le sens réciproque, on pourrait aussi avoir $\frac{p}{q} = -\sqrt{2}$

$$\implies p^2 = 2q^2$$

$$\implies p^2 \text{ est pair}$$

Nous avons donc prouvé que p^2 est pair.

Par l'absurde, supposons que p ne soit pas pair. Il est alors impair. Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k + 1$.

$$\text{On a alors } p^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Donc p^2 est impair, ce qui contredit le résultat précédent.

On en déduit que p est pair.

2. p était pair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$. Par conséquent, $p^2 = 4k^2$. On a donc

$$\begin{aligned} p^2 = 2q^2 &\implies 4k^2 = 2q^2 \\ &\implies q^2 = 2k^2 \\ &\implies q^2 \text{ est pair} \end{aligned}$$

Avec le même raisonnement par l'absurde qu'à la question précédente, on en déduit que q est pair.

3. En supposant que $\sqrt{2}$ puisse s'écrire sous forme d'une fraction irréductible, nous avons prouvé que son numérateur et son dénominateur sont divisibles par 2. Cela contredit l'irréductibilité de la fraction. Par conséquent, $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous forme d'une fraction irréductible.

Or toute fraction peut s'écrire sous forme irréductible. On en déduit que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

 **Exercice 14 :** Montrer que si $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.

Nous allons prouver par contraposée que si $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.

Autrement dit, cela revient à prouver la proposition : si n est impair, alors $(n^2 - 1)$ est divisible par 8.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Supposons donc que n est impair. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. On a donc

$$\begin{aligned} n = 2k + 1 &\implies n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ &\implies n^2 - 1 = 4(k^2 + k) \end{aligned}$$

Or on montre que $k^2 + k$ est toujours pair (k^2 a la même parité que k).

Ainsi, $n^2 - 1$ est le produit de 4 par un nombre pair. C'est donc un multiple de $4 \times 2 = 8$.

On en déduit que si n est impair, alors $(n^2 - 1)$ est divisible par 8. Par contraposée, nous avons donc prouvé que si $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.

 **Exercice 15 :** Est-il vrai que $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$?

Pour $x = -3$ on a $\sqrt{(-3)^2} = 3 \neq -3$. Donc cette proposition est fausse.

3. Exercices d'approfondissement

 **Exercice 16** (Un autre exemple de raisonnement) : Le but de cet exercice est de déterminer, si elles existent, toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, et vérifiant la condition suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Pour cela nous allons utiliser un type de raisonnement appelé *analyse-synthèse*. Celui-ci utilise deux étapes :

- *Analyse*. On suppose qu'une fonction vérifie la condition demandée et on analyse les propriétés qui en découlent. On va arriver à une expression explicite de la fonction f
- *Synthèse*. On part cette fois de l'expression obtenue pour montrer qu'elle vérifie bien la condition demandée. Cette étape est indispensable pour montrer qu'on a bien obtenu une solution.

1. Analyse : considérons f une telle fonction.

- (a) En donnant à x et y des valeurs particulières, donner les seules valeurs possibles de $f(0)$.
- (b) En donnant à x et y d'autres valeurs particulières, justifier que $f(0)$ vaut nécessairement 1.
- (c) En donnant à y seulement une certaine valeur, donner l'expression de $f(x)$ pour tout réel x .

2. Synthèse : conclure quant au but de l'exercice.

On veut étudier la propriété

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

Le fait de « nommer » la propriété avec une astérisque nous permettra d'y faire référence sans avoir besoin de la citer en intégralité.

1. (a) Soit f une fonction vérifiant la propriété (*). Considérons $x = 0$ et $y = 0$. Alors on a $f(0)^2 - f(0) = 0$. On en déduit que $f(0) \in \{0; 1\}$. ($f(0)$ vérifie l'équation du second degré $y^2 - y = 0$, qui donne les valeurs 0 et 1 comme solutions)
- (b) Par l'absurde, supposons $f(0) = 0$. Alors pour $x = 0$ et $y = 2$, la propriété (*) donne $0 = 2$, ce qui est absurde.
On en déduit que $f(0) \neq 0$. Le résultat de la question précédente nous permet de conclure que $f(0) = 1$.
- (c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = 0$. Alors la propriété (*) donne $f(x) \times 1 - f(0) = x + 0$. Or $f(0) = 1$. On en conclut que $f(x) = x + 1$.
2. Nous avons montré à la question précédente que si f vérifie (*), alors f vérifie $f(x) = x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1$. Alors on a

$$f(x)f(y) - f(xy) = (x + 1)(y + 1) - (xy + 1) = x + y$$

Donc f vérifie (*).

On a donc montré que f vérifie (*) si et seulement si $f(x) = x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, la seule fonction vérifiant cette propriété est la fonction f définie ci-dessus.



Exercice 17 (Récurrence) : Le raisonnement par récurrence sera travaillé au chapitre 5. Voici un exercice pour en réviser le principe, si vous vous souvenez de la méthode.

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}u_n$ pour $n \geq 0$.
 - (a) Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{2n} + 2$ est divisible par 3.

1. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $u_n > 0$ ». Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Pour $n = 0$ on a $u_0 = 3 > 0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence on a $u_n > 0$.

De plus, $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}u_n$ qui est strictement positif comme produit de nombres strictement positifs.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par principe de récurrence on en déduit que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

On sait que $\frac{n+1}{n+2} < 1$ car $n+1 < n+2$.

Ainsi en multipliant par $u_n > 0$ on obtient $\frac{n+1}{n+2}u_n < u_n$, soit $u_{n+1} < u_n$.

On en déduit que la suite (u_n) est strictement décroissante.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation. Pour $n = 1$ on a

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

$$1 + \dots + n = 1.$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On sait par hypothèse de récurrence que $1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\text{Donc } 1 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par principe de récurrence, on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: $2^{2n} + 2$ est divisible par 3. Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Pour $n = 0$ on a $2^{2 \cdot 0} + 2 = 2^0 + 2 = 3$ qui est bien un multiple de 3.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On sait par hypothèse de récurrence que $2^{2n} + 2$ est divisible par 3. Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^{2n} + 2 = 3k$.

Donc $2^{2n} = 3k - 2$

Ainsi, $2^{2(n+1)} + 2 = 2^{2n+2} + 2 = 2^{2n} \times 4 + 2 = (3k - 2) \times 4 + 2 = 12k - 8 + 2 = 12k - 6 = 3(4k - 1)$

Donc ce nombre est divisible par 3.

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par principe de récurrence, on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. En autonomie

  **Exercice 18** (Manipuler des expressions logiques) : On considère E un intervalle de $\mathbb{R}$ et les propositions suivantes :

$$A : (\forall x \in E, x \geq 2) \quad B : (\exists x \in E, x > 1) \quad C : (\forall x \in E, \exists y \in E, x + y = 2)$$

1. Nier les propositions A , B et C .
2. On considère dans cette question $E = [0, 4]$. Donner, en la justifiant, la valeur de chacune des propositions A , B et C .
3. Même question avec l'intervalle $E = [-1, 3]$.

1. non A : non $(\forall x \in E, x \geq 2) \equiv \exists x \in E$ tel que $x < 2$
non B : non $(\exists x \in E$ tel que $x > 1) \equiv \forall x \in E, x \leq 1$
non C : non $(\forall x \in E, \exists y \in E, x + y = 2) \equiv \exists x \in E$ tel que $\forall y \in E, x + y \neq 2$
2. A est fausse car $0 \in E$ et $0 < 2$
 B est vraie car $2 \in E$ et $2 > 1$
 C est fausse car $4 \in E$ et $\forall y \in E, y + 4 \neq 2$
3. A est fausse car $0 \in E$ et $0 < 2$
 B est vraie car $2 \in E$ et $2 > 1$
 C est vraie car $\forall x \in E, \exists y = 2 - x$ tel que $x + y = 2$. On vérifie que dans ce cas, $y \in E$.

  **Exercice 19** (Tester des propositions) : Dire si ces propositions sont vraies.

1. Pour que le produit de deux réels soit positif, il suffit que ces réels soient positifs.
2. Il est nécessaire que $x > 0$ pour que $2x + 3 > 0$.
3. Pour que $x = 2$, il faut que $x^2 = 4$.

1. Pour que le produit de deux réels soit positif, il suffit que ces réels soient positifs. **Vraie** Mais si on remplace « il suffit » par « il faut », alors la proposition est fausse.
2. Il est nécessaire que $x > 0$ pour que $2x + 3 > 0$. **Fausse.** Par exemple, $2 \times (-1) + 3 > 0$
3. Pour que $x = 2$, il faut que $x^2 = 4$. **Vraie.** (en effet, si $x^2 \neq 4$, on ne peut pas avoir $x = 2$.)

  **Exercice 20** (Prouver une proposition) : Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $x \geq 1 \iff \frac{\sqrt{x} - 1}{x} \geq 0$.

Il s'agit d'une équivalence. On peut penser à un raisonnement par double implication. Mais une fois les étapes notées, on se rend compte qu'on a suivi exactement les mêmes étapes (en inversant l'ordre pour la réciproque). On peut donc reprendre cette démonstration avec des équivalences.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}-1}{x} \geq 0 &\iff \sqrt{x}-1 \geq 0 \quad \text{en multipliant par } x > 0 \\ &\iff \sqrt{x} \geq 1 \\ &\iff x \geq 1 \quad \text{par croissance de la fonction carré sur } \mathbb{R}_+^*\end{aligned}$$

On en déduit donc que $x \geq 1 \iff \frac{\sqrt{x}-1}{x} \geq 0$.

  **Exercice 21** (Prouver une proposition) : Soit a un réel positif. Prouver l'équivalence :

$$(a = 0) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, a \leq \varepsilon)$$

Sens direct. Supposons $a = 0$.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a bien $\varepsilon > a$.

On a donc $a = 0 \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0, a \leq \varepsilon)$.

Sens réciproque. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, alors $a \leq \varepsilon$, et montrons qu'alors $a = 0$.

Par l'absurde : si $a \neq 0$, alors on peut appliquer la propriété en prenant $\varepsilon = \frac{a}{2}$. Comme a est positif, on a alors $\varepsilon < a$. Contradiction avec $a \leq \varepsilon$.

Par conséquent, on a nécessairement $a = 0$.

On a donc $(\forall \varepsilon > 0, a \leq \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.

Nous avons prouvé les deux implications, ce qui permet de conclure que $(a = 0) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, a \leq \varepsilon)$.

  **Exercice 22** (Prouver une proposition) : Soient $a_1, \dots, a_9$ des nombres réels rangés dans l'ordre croissant tels que

$$a_1 + \dots + a_9 = 90.$$

Montrer qu'il existe trois de ces nombres dont la somme est supérieure ou égale à 30.

Soient $a_1, \dots, a_9$ des nombres réels vérifiant les conditions de l'énoncé.

Par l'absurde, supposons que la somme de 3 nombres parmi les a_i soit toujours strictement inférieure à 30. Alors en particulier, on a

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 < 30 \\ a_4 + a_5 + a_6 < 30 \\ a_7 + a_8 + a_9 < 30 \end{cases}$$

En sommant ces 3 inégalités on obtient

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 < 90$$

ce qui contredit l'hypothèse initiale.

On en conclut que $\boxed{\text{il existe trois de ces nombres dont la somme est supérieure ou égale à 30}}$.

🏠 ☀ Exercice 23 (Prouver une proposition) :

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer que si $a \leq b$ alors $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ et que $a \leq \sqrt{ab} \leq b$. ☀
2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $b \neq 0$ alors $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (On utilisera que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Supposons $a \leq b$ (*).

En ajoutant a à chaque membre de cette inégalité, on obtient $2a \leq a + b$, puis $a \leq \frac{a+b}{2}$.

De même en ajoutant b à chaque membre, et en divisant par 2, on obtient $\frac{a+b}{2} \leq b$.

On en déduit $\boxed{a \leq \frac{a+b}{2} \leq b}$.

Pour prouver le second encadrement, l'idée est cette fois de multiplier par a et b . Ces deux nombres sont bien positifs, donc le sens de l'inégalité ne va pas changer. Il faut par contre s'assurer qu'ils soient non nuls

Cas 1. $a \neq 0$. Alors $b > 0$ d'après (*).

En multipliant l'inégalité (*) par $a > 0$, on obtient $a^2 \leq ab$. Comme les deux membres sont positifs, on peut appliquer la fonction racine carrée, croissante sur $\mathbb{R}_+$, ce qui donne $a \leq \sqrt{ab}$.

De même en multipliant par b puis en appliquant la racine carrée, on obtient $\sqrt{ab} \leq b$

On en déduit que $a \leq \sqrt{ab} \leq b$.

Cas 2. $a = 0$, alors $0 \leq \sqrt{0} \leq b$, ce qui prouve l'encadrement recherché.

On peut donc conclure que $\boxed{\text{pour tous } a, b \in \mathbb{R}_+, \text{ on a } a \leq \sqrt{ab} \leq b}$.

2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

Par l'absurde, supposons $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe deux entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $a + b\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Alors $b\sqrt{2} = \frac{p}{q} - a = \frac{p - aq}{q}$

Donc $\sqrt{2} = \frac{p - aq}{bq}$.

Or $p - aq \in \mathbb{Z}$ et $bq \in \mathbb{Z}$, donc $\frac{p - aq}{bq} \in \mathbb{Q}$. On obtient alors $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Contradiction.

On en déduit par l'absurde que $\boxed{a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}$.

🏠 ☀ Exercice 24 (Raisonnement) : La proposition suivante est-elle vraie ?

Pour tous réels x et y , $x \leq y \iff x^2 \leq y^2$.

Pour $x = -3$ et $y = 2$ on a $-3 \leq 2$ et $(-3)^2 > 2^2$.

Ce contre exemple permet de prouver que l'implication $x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$ est fausse.

Par conséquent, l'équivalence est fausse.

5. Type DS ou concours

 **Exercice 25** (Étude d'une suite définie par une somme) : *Prérequis : utilisation du signe somme $\sum$, récurrence.*

Soit (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

On se propose d'exprimer u_n en fonction de n par deux méthodes différentes :

1. Première méthode : conjecture et récurrence.

- (a) Calculer u_0 , u_1 , u_2 et u_3 .
 - (b) Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n .
 - (c) Démontrer ce résultat par récurrence.
2. (a) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

- (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Indication. Utiliser l'expression obtenue pour la réintroduire dans la somme. Expliciter les premiers termes et les derniers termes de la somme obtenue.

3. Comparaison des deux méthodes :

Vérifier que les expressions obtenues avec la méthode 1 et la méthode 2 sont égales.

1. Première méthode : conjecture et récurrence.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad u_0 &= \sum_{k=0}^0 \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{(0+1)(0+2)} = \frac{1}{2} \\ u_1 &= \sum_{k=0}^1 \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{(0+1)(0+2)} + \frac{1}{(1+1)(1+2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ u_2 &= \sum_{k=0}^2 \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3 \times 4} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \\ u_3 &= \sum_{k=0}^3 \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4 \times 5} = \frac{96}{120} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

- (b) D'après les calculs précédents il semble que $u_n = \frac{n+1}{n+2}$.

- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\mathcal{P}(n) = u_n = \frac{n+1}{n+2}$. Prouvons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Pour $n = 0$ on a déterminé $u_0 = \frac{1}{2}$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a par hypothèse de récurrence $u_n = \frac{n+1}{n+2}$. On a donc

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+1+1)(n+1+2)} \\
 &= u_n + \frac{1}{(n+2)(n+3)} \\
 &= \frac{n+1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} \quad \text{en utilisant l'hypothèse de récurrence} \\
 &= \frac{(n+1)(n+3)+1}{(n+2)(n+3)} \\
 &= \frac{n^2+4n+4}{(n+2)(n+3)} = \frac{(n+2)^2}{(n+2)(n+3)} \quad \text{on factorise avec une identité remarquable} \\
 &= \frac{n+2}{n+3}
 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par principe de récurrence, on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. (a) Pour $k \in \mathbb{N}$ on a $\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{k+2-(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

(b) On obtient donc

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$

On remarque que tous les termes s'annulent sauf $\frac{1}{1}$ et $\frac{1}{n+2}$.

$$\text{Donc } u_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2-1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}$$

3. Les deux expressions sont bien identiques : $u_n = \frac{n+1}{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.