

Devoir Maison n° 1 à rendre le 8 octobre 2026 au plus tard

Travail obligatoire et non noté

Au choix : travaillez une partie en entier (partie 1 ou 2), ou piochez dans les deux parties pour adapter le niveau de difficulté. Assurez-vous de traiter tous les thèmes : en particulier l'exercice 2 est le seul sur Python, donc à faire obligatoirement!

Le travail sera rendu sur une copie, pensez à laisser la place pour les annotations.

Selon le temps que vous avez à consacrer aux DM, vous pouvez :

- Le rendre en plusieurs fois, selon l'avancement de votre travail.
- Choisir de traiter certains exercices sans les rédiger. Dans ce cas, précisez-moi au début de l'exercice « non rédigé », et donnez-moi vos traces de calcul.

Partie 1 : applications directes

Exercice 1 (Calcul - Résolutions d'équations et d'inéquations) : Résoudre les (in)équations (en commençant par préciser le domaine de définition) :

- | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $3e^{2x} - 3e^x = 0$ | 4. $3^{x-1} = 9^{1-2x}$ |
| 2. $2\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln(2x+2)$ | 5. $x^2 \leq x+2 $ |
| 3. $\frac{\ln x}{1+\ln x} > 0$ | 6. $\lfloor x^2 + 3x \rfloor \leq 4$ |

Exercice 2 (Informatique) : Écrire un script qui demande à l'utilisateur de saisir le rayon d'un cercle puis affiche son périmètre. Le programme devra être recopié sur la copie. Cela n'empêche évidemment pas de le tester d'abord sur ordinateur!

Le résultat attendu est le suivant :

Donner le rayon : 5
le périmètre de ce cercle est : 31.41592653589793

Exercice 3 (Logique) :

- Donner la négation de chacune des propositions suivantes. On ne demande pas de déterminer si ces propositions sont vraies ou fausses, mais de les écrire sous forme logique.
 - $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+, x + y \in \mathbb{R}_+$.
 - $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } n = 2k \text{ ou } n = 2k + 1$
 - $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \geq 3, x + y > 0 \implies xy < 0$
- Donner la contraposée et la réciproque de chacune des propositions suivantes (on ne demande pas non plus si ces propositions sont vraies ou fausses).
 - $\forall x \in \mathbb{R}, x = 3 \implies x^2 = 9$
 - $\forall n \in \mathbb{N}, n = n^2 \implies n = 1 \text{ ou } n = 0$
 - Le carré d'un multiple de 3 est encore un multiple de 3 (commencez par traduire cette phrase sous forme logique)

Exercice 4 (Sommes) : Préciser pour quelles valeurs de n ces sommes sont valables puis calculer leur valeur.

- | | | |
|--------------------------|---------------------------------------|--------------------------------|
| 1. $\sum_{k=0}^n (2k-3)$ | 2. $\sum_{k=0}^n \frac{2^k}{5^{k-1}}$ | 3. $\sum_{k=3}^{n+1} (3-2k)^2$ |
|--------------------------|---------------------------------------|--------------------------------|

Partie 2 : Problèmes

Exercice 5 (Calcul - Propriétés du logarithme décimal) : Pour tout réel $x > 0$, on appelle logarithme décimal de x , le réel noté $\log x$, défini par

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

1. Que vaut $\log 10$?
2. En utilisant les propriétés de la fonction $\ln$, démontrer que pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, pour tout entier relatif p , les égalités :

$$\log(ab) = \log a + \log b \quad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b \quad \log(a^p) = p \log a$$

3. Montrer que pour tout réel x , $\log(10^x) = x$.
4. Montrer que pour tout $x > 0$, $10^{\log x} = x$.

Exercice 6 (Logique) : Le but de l'exercice est de montrer que $\sqrt{6}$ est un nombre irrationnel. On suppose par l'absurde qu'il existe p et q deux entiers avec $q \geq 1$ tels que $\sqrt{6}$ s'écrive $\frac{p}{q}$ de façon irréductible.

1. (a) Montrer que p^2 est pair.
(b) En déduire que p est pair.
2. (a) Soient m et n deux nombres impairs. Montrer que le produit mn est un nombre impair.
(b) En déduire que q^2 est pair. (On pourra être amené à raisonner par l'absurde.)
(c) Montrer que q est pair.
3. Conclure.
4. Soient a et b deux nombres rationnels tels que $a + b\sqrt{6} = 0$. Montrer que $a = b = 0$.

Exercice 7 (Sommes) : Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(k+1)! - k! = k \times k!$.
(b) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n k \times k!$ où $n \in \mathbb{N}$.
2. Le but de cette partie est d'obtenir une expression de $\sum_{k=0}^n k^3$ à l'aide des méthodes déjà connues.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit

$$S_n = \sum_{k=0}^n ((k+1)^4 - k^4); \quad T_n = \sum_{k=0}^n k^3; \quad D_n = \sum_{k=0}^n k^2$$

- (a) Calculer S_n .
- (b) Simplifier l'expression $(k+1)^4 - k^4$ pour $k \in \mathbb{N}$ puis en déduire une expression de S_n en fonction de T_n et D_n .
- (c) Rappeler l'expression de D_n (appliquer la formule du cours), puis en déduire une expression de T_n .