

Devoir Maison n° 1

Partie 1 : applications directes

Exercice 1 (Calcul - Résolutions d'équations et d'inéquations) : Résoudre les (in)équations (en commençant par préciser le domaine de définition) :

1. $3e^{2x} - 3e^x = 0$ (E)

On résout (E) sur $\mathbb{R}$.

$$(E) \iff 3e^{2x} = 3e^x \iff e^{2x} = e^x \iff 2x = x \iff x = 0.$$

Donc $S = \{0\}$.

2. $2\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln(2x+2)$ (E)

Pour que (E) soit définie, il faut que $x+1 > 0$, $x-1 > 0$ et $2x+2 > 0$

$$\iff x > -1, x > 1 \text{ et } x > -1.$$

Donc on résout (E) sur $]1; +\infty[$. **Il faut vérifier les 3 conditions.**

Pour tout $x \in]1; +\infty[$,

$$(E) \iff \ln(x+1)^2 + \ln(x-1) = \ln(2x+2)$$

$$\iff \ln((x+1)^2(x-1)) = \ln(2(x+1)) \quad \text{car } \ln a + \ln b = \ln ab$$

$$\iff (x+1)^2(x-1) = 2(x+1) \quad \text{en passant à l'exponentielle}$$

$$\iff (x+1)^2(x-1) - 2(x+1) = 0$$

$$\iff (x+1)((x+1)(x-1) - 2) = 0 \quad \text{factoriser par } x+1 \text{ simplifie les calculs}$$

$$\iff (x+1)(x^2 - 1 - 2) = 0$$

$$\iff (x+1)(x^2 - 3) = 0$$

$$\iff x = -1 \text{ ou } x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}$$

Ainsi, $S = \{\sqrt{3}\}$ car $-1 \notin]1; +\infty[$ et $-\sqrt{3} \notin]1; +\infty[$.

3. $\frac{\ln x}{1 + \ln x} > 0$ (I)

Pour que (I) soit définie, il faut que $x > 0$ et $1 + \ln x \neq 0$, ce qui équivaut à $x > 0$ et $\ln x \neq -1$, ce qui équivaut à $x > 0$ et $x \neq e^{-1}$. Ainsi, on résout (I) sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{e^{-1}\}$.

On a tout d'abord $\ln(x) > 0 \iff x > 1$.

D'autre part, $1 + \ln(x) > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff x > e^{-1}$.

On fait donc un tableau de signes.

x	0	e^{-1}	1	$+\infty$	
$\ln(x)$		−	−	0	+
$1 + \ln(x)$		−	0	+	+
$\frac{\ln(x)}{1 + \ln(x)}$		+	−	0	+

On en déduit que $S =]0; e^{-1}[\cup]1; +\infty[$.

N'oubliez pas que pour qu'une fraction soit positive, il faut que le numérateur et le dénominateur soient de même signe. Il ne faut pas se contenter de résoudre le numérateur et le dénominateur positifs.

4. $3^{x-1} = 9^{1-2x}$ (E)

On résout (E) sur $\mathbb{R}$.

$$(E) \Leftrightarrow \ln(3^{x-1}) = \ln(9^{1-2x})$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\ln 3 = (1-2x)\ln 9$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\ln 3 = (1-2x)\ln 3^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\ln 3 = (1-2x) \times 2\ln 3$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 2(1-2x) \quad \text{on peut simplifier par } \ln 3 \text{ car } \ln 3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 2-4x$$

$$\Leftrightarrow 5x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$$

Donc $S = \left\{ \frac{3}{5} \right\}$.

5. $x^2 \leq |x+2|$ (I)

On résout (I) sur $\mathbb{R}$.

$$(I) \Leftrightarrow x+2 \geq x^2 \text{ ou } x+2 \leq -x^2 \Leftrightarrow 0 \geq x^2 - x - 2 \text{ ou } x^2 + x + 2 \leq 0$$

Pour $x^2 - x - 2$, on a $\Delta = 9 > 0$ donc $x_1 = \frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$. Ainsi, $0 \geq x^2 - x - 2$ pour $x \in [-1; 2]$.

Pour $x^2 + x + 2$, on a $\Delta = -3$ donc pas de racine et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 2 > 0$.

On en déduit donc que $S = [-1; 2]$.

6. $\lfloor x^2 + 3x \rfloor \leq 4$ (I)

On résout (I) sur $\mathbb{R}$.

Par définition de la fonction partie entière, $(I) \Leftrightarrow x^2 + 3x < 5 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 5 < 0$.

$$\Delta = 29 \text{ donc } x_1 = \frac{-3-\sqrt{29}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-3+\sqrt{29}}{2}.$$

Donc $S = \left] \frac{-3-\sqrt{29}}{2}; \frac{-3+\sqrt{29}}{2} \right[$.

Exercice 2 (Informatique) : Écrire un script qui demande à l'utilisateur de saisir le rayon d'un cercle puis affiche son périmètre.

Le résultat attendu est le suivant :

```
Donner le rayon : 5
le périmètre de ce cercle est : 31.41592653589793
```

→ Le programme devra être recopié sur la copie. Cela n'empêche évidemment pas de le tester d'abord sur ordinateur!

```

1 import numpy as np
2 rayon = float(input('donner le rayon du cercle : '))
3 perimetre = 2 * np.pi * rayon
4 print('le périmètre du cercle est ', perimetre)

```

Exercice 3 (Logique) :

- Donner la négation de chacune des propositions suivantes. On ne demande pas de déterminer si ces propositions sont vraies ou fausses, mais de les écrire sous forme logique.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+, x + y \in \mathbb{R}_+$.

$$\exists x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}_+, \text{ tels que } x + y \notin \mathbb{R}_+$$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } n = 2k \text{ ou } n = 2k + 1$

$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall k \in \mathbb{Z}, n \neq 2k \text{ et } n \neq 2k + 1$$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \geq 3, x + y > 0 \implies xy < 0$

$$\exists x \in \mathbb{R} \exists y \geq 3, \text{ tels que } x + y > 0 \text{ et } xy \geq 0$$

- Donner la contraposée et la réciproque de chacune des propositions suivantes (on ne demande pas non plus si ces propositions sont vraies ou fausses).

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, x = 3 \implies x^2 = 9$

Contraposée : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 9 \implies x \neq 3$

Réciproque : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 9 \implies x = 3$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, n = n^2 \implies n = 1 \text{ ou } n = 0$

Contraposée : $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq 1 \text{ et } n \neq 0 \implies n \neq n^2$

Réciproque : $\forall n \in \mathbb{N}, n = 1 \text{ ou } n = 0 \implies n = n^2$

- (c) Le carré d'un multiple de 3 est encore un multiple de 3 (commencez par traduire cette phrase sous forme logique)

Proposition de l'énoncé : $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z}, n = 3k \implies \exists p \in \mathbb{Z}, n^2 = 3p$

Contraposée : $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall p \in \mathbb{Z}, n^2 \neq 3p \implies \forall k \in \mathbb{Z}, n \neq 3k$

Réciproque : $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists p \in \mathbb{Z}, n^2 = 3p \implies \exists k \in \mathbb{Z}, n = 3k$

Exercice 4 (Sommes) : Calculer les sommes suivantes.

1. $\sum_{k=0}^n (2k - 3)$

2. $\sum_{k=0}^n \frac{2^k}{5^{k-1}}$

3. $\sum_{k=3}^{n+1} (3 - 2k)^2$

1. Cette somme est définie pour $n \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n (2k-3) &= 2 \sum_{k=0}^n k - \sum_{k=0}^n 3 \quad \text{par linéarité} \\ &= 2 \frac{n(n+1)}{2} - 3(n+1) \\ &= n(n+1) - 3(n+1) \\ &= \boxed{(n+1)(n-3)}\end{aligned}$$

On peut aussi donner la forme développée : $n^2 - 2n - 3$

2. Cette somme est définie pour $n \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \frac{2^k}{5^{k-1}} &= \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{5^k 5^{-1}} \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{5}\right)^k \times 5 \\ &= 5 \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{5}\right)^k \quad \text{par linéarité} \\ &= 5 \frac{1 - (2/5)^{n+1}}{1 - (2/5)} \\ &= 5 \frac{1 - (2/5)^{n+1}}{3/5} \\ &= 5 \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right) \times \frac{5}{3} \\ &= \boxed{\frac{25}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)}\end{aligned}$$

3. Cette somme est définie pour $n \geq 2$ car il faut que $n+1 \geq 3$ (la borne du haut doit être supérieure à celle du bas).

Cette somme ne commence pas au rang 0 et elle contient des k^2 une fois développée. On a donc 3 solutions pour la calculer :

- on commence par développer, on obtient 3 sommes. On applique les formules partant d'un rang p pour les deux premières sommes obtenues (somme d'une constante et $\sum k$) mais pas pour la dernière, $\sum k^2$. Il faudra donc la déterminer à l'aide de la relation de Chasles.
- on applique la relation de Chasles dès le début pour simplifier l'utilisation des formules (on applique uniquement celles partant du rang 0
- on applique un changement d'indice pour se ramener au rang 0 dès le début.

Je vous montre l'utilisation des deux dernières méthodes.

voit apparaître un facteur commun $(n-1)$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=3}^{n+1} (3-2k)^2 &= 2 \frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{3} + 6(n-2)(n-1) + 9(n-1) \\
 &= (n-1) \left(\frac{2(n-2)(2n-3)}{3} + 6(n-2) + 9 \right) \\
 &= (n-1) \frac{(2n-4)(2n-3) + 6(n-2) \times 3 + 27}{3} \\
 &= (n-1) \frac{4n^2 - 6n - 8n + 12 + 18n - 36 + 27}{3} \\
 &= (n-1) \frac{4n^2 + 4n + 3}{3}
 \end{aligned}$$

Et on peut vérifier avec le calcul de Δ que cette expression n'est plus factorisable.

Partie 2 : Problèmes

Exercice 5 (Calcul - Propriétés du logarithme décimal) : Pour tout réel $x > 0$, on appelle logarithme décimal de x , le réel noté $\log x$, défini par

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

1. Que vaut $\log 10$?

On a $\log 10 = \frac{\ln 10}{\ln 10} = \boxed{1}$.

2. En utilisant les propriétés de la fonction $\ln$, démontrer que pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, pour tout entier relatif p , les égalités :

$$\log(ab) = \log a + \log b \quad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b \quad \log(a^p) = p \log a$$

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\log(ab) = \frac{\ln(ab)}{\ln 10} = \frac{\ln a + \ln b}{\ln 10} = \frac{\ln a}{\ln 10} + \frac{\ln b}{\ln 10} = \boxed{\log a + \log b}$.

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{\ln 10} = \frac{\ln a - \ln b}{\ln 10} = \frac{\ln a}{\ln 10} - \frac{\ln b}{\ln 10} = \boxed{\log a - \log b}$

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, pour tout entier relatif p , $\log(a^p) = \frac{\ln(a^p)}{\ln 10} = \frac{p \ln a}{\ln 10} = \boxed{p \log a}$.

3. Montrer que pour tout réel x , $\log(10^x) = x$.

Attention ici, vous ne pouvez pas utiliser la propriété précédente avec $x = p$ car $p \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. Il faut donc bien démontrer cette propriété. Pour cela, on va utiliser la définition de $10^x = e^{x \ln 10}$.

Pour tout réel x , $\log(10^x) = \frac{\ln 10^x}{\ln 10} = \frac{\ln(e^{x \ln 10})}{\ln 10} = \frac{x \ln 10}{\ln 10} = \boxed{x}$.

4. Montrer que pour tout $x > 0$, $10^{\log x} = x$.

$$\text{Pour tout } x > 0, 10^{\log x} = e^{\log x \ln 10} = e^{\frac{\ln x}{\ln 10} \ln 10} = e^{\ln x} = \boxed{x}.$$

Exercice 6 (Logique) : Le but de l'exercice est de montrer que $\sqrt{6}$ est un nombre irrationnel. On suppose par l'absurde qu'il existe p et q deux entiers avec $q \geq 1$ tels que $\sqrt{6}$ s'écrive $\frac{p}{q}$ de façon irréductible.

1. (a) Montrer que p^2 est pair.

Il s'agit de montrer que p^2 s'écrit comme 2 fois un nombre entier.

$$\sqrt{6} = \frac{p}{q} \iff p = \sqrt{6}q \implies p^2 = 6q^2 = 2 \times (3q^2).$$

Comme q est un entier, q^2 aussi et donc $3q^2$ aussi. Par conséquent, p^2 est un nombre pair.

(b) En déduire que p est pair.

Ce raisonnement n'est pas propre à cet exercice, il a déjà été fait en cours. Il peut se faire par l'absurde ou par contraposée.

Supposons par l'absurde que p est impair. Alors il existe un entier m tel que $p = 2m + 1$. Ainsi, $p^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$. Comme m est un entier, $2m^2 + 2m$ aussi et p^2 est un nombre impair, ce qui est absurde d'après la question 1a).

D'où p est un nombre pair.

2. (a) Soient m et n deux nombres impairs. Montrer que le produit mn est un nombre impair.

Ici, l'erreur classique consiste à écrire m et n comme des $2k + 1$ mais m et n ne sont pas nécessairement égaux. Prenez $2k + 1$ pour l'un et $2l + 1$ pour l'autre avec k et l des entiers.

Soient m et n des nombres impairs. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}$ tels que $m = 2k + 1$ et $n = 2l + 1$.

Alors, $mn = (2k + 1)(2l + 1) = (4kl + 2k + 2l + 1) = 2(2kl + k + l) + 1$. Comme k et l sont des entiers, $2kl + k + l$ est un entier et mn est un nombre impair.

(b) En déduire que q^2 est pair. (On pourra être amené à raisonner par l'absurde.)

Supposons par l'absurde que q^2 est impair.

On sait que $p^2 = 6q^2$.

D'autre part, on a déjà vu que p est pair donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2m$.

$$\text{Ainsi, } (2m)^2 = 6q^2 \iff 4m^2 = 6q^2 \iff 2m^2 = 3q^2.$$

Comme 3 et q^2 sont impairs, d'après la question précédente, $3q^2$ est un nombre impair. Or, $2m^2$ est pair donc c'est absurde car un nombre ne peut pas être à la fois pair et impair.

Par conséquent, q^2 est pair.

(c) Montrer que q est pair.

Le raisonnement est exactement le même qu'à la question 1b) en remplaçant p par q .
Il n'est donc pas nécessaire de le faire sur vos copies non plus dans ce cas-là.

3. Conclure.

p et q sont pairs mais la fraction $\frac{p}{q}$ était supposée irréductible, ce qui est absurde. Par conséquent, $\sqrt{6}$ ne peut pas s'écrire comme le quotient de deux entiers et $\boxed{\sqrt{6} \text{ est un irrationnel}}$.

4. Soient a et b deux nombres rationnels tels que $a + b\sqrt{6} = 0$. Montrer que $a = b = 0$.

Cas 1 : $b \neq 0$

$a + b\sqrt{6} = 0 \iff \sqrt{6} = -\frac{a}{b}$. Comme a et $b \in \mathbb{Q}$, $-\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Or $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$ donc c'est impossible et $\boxed{b \text{ ne peut pas être différent de } 0}$.

Cas 2 : $b = 0$.

$a + b\sqrt{6} = 0 \iff \boxed{a = 0}$.

Exercice 7 (Sommes) : Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(k+1)! - k! = k \times k!$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ on a

$$(k+1)! - k! = (k+1)k! - k! = k!(k+1-1) = \boxed{k! \times k}$$

(b) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n k \times k!$ où $n \in \mathbb{N}$.

En appliquant le résultat de la question précédente on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k \times k! &= \sum_{k=0}^n ((k+1)! - k!) \\ &= (n+1)! - 0! \text{ par somme télescopique} \\ &= \boxed{(n+1)!} \end{aligned}$$

2. Le but de cette partie est d'obtenir une expression de $\sum_{k=1}^n k^3$ à l'aide des méthodes déjà connues.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit

$$S_n = \sum_{k=0}^n ((k+1)^4 - k^4); \quad T_n = \sum_{k=0}^n k^3; \quad D_n = \sum_{k=0}^n k^2$$

(a) Calculer S_n .

On reconnaît une somme télescopique. On obtient $S_n = \sum_{k=0}^n ((k+1)^4 - k^4) = (n+1)^4 - 0^4 = \boxed{(n+1)^4}$

- (b) Simplifier l'expression $(k+1)^4 - k^4$ pour $k \in \mathbb{N}$ puis en déduire une expression de S_n en fonction de T_n et D_n .

On développe pour obtenir

$$\begin{aligned}
 (k+1)^4 - k^4 &= (k+1)^2(k+1)^2 - k^4 \\
 &= (k^2 + 2k + 1)(k^2 + 2k + 1) - k^4 \\
 &= k^4 + 2k^3 + k^2 + 2k^3 + 4k^2 + 2k + k^2 + 2k + 1 - k^4 \\
 &= \boxed{4k^3 + 6k^2 + 4k + 1}
 \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=0}^n (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) \\
 &= 4 \sum_{k=0}^n k^3 + 6 \sum_{k=0}^n k^2 + 4 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 \quad \text{par linéarité de la somme} \\
 &= 4T_n + 6D_n + 4 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
 &= \boxed{4T_n + 6D_n + (n+1)(2n+1)}
 \end{aligned}$$

- (c) Rappeler l'expression de D_n (appliquer la formule du cours), puis en déduire une expression de T_n .

On sait que $D_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Par ailleurs on a montré en question a que $S_n = (n+1)^4$. On en déduit donc en remplaçant ces valeurs dans l'expression obtenue à la question précédente :

$$(n+1)^4 = 4T_n + 6 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)(2n+1)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 4T_n &= (n+1)^4 - 6 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - (n+1)(2n+1) \\
 &= (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - (n+1)(2n+1) \\
 &= (n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) - (n^2 + n)(2n+1) - (2n^2 + n + 2n + 1) \\
 &\quad \text{on a repris le développement de } (n+1)^4 \text{ effectué en question b.} \\
 &= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - (2n^3 + n^2 + 2n^2 + n) - 2n^2 - 3n - 1 \\
 &= n^4 + 2n^3 + n^2 \\
 &= n^2(n^2 + 2n + 1) \\
 &= n^2(n+1)^2
 \end{aligned}$$

On obtient donc $T_n = \boxed{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}$