
CHAPITRE 3

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

1. Définitions	2
2. Opérations usuelles sur les fonctions	3
3. Parité, imparité	5
4. Sens de variations	6
5. Extrema et bornes	7
6. Dérivation et applications	9
6.1 Formules usuelles des dérivées	9
6.2 Variations	10
6.3 Extrema	11
6.4 Démontrer des inégalités	11
TD	12
1. Ensemble de définition et calculs de dérivées	12
2. Fonctions paires, impaires	12
3. Composée de fonctions	12
4. Étude de fonctions	13
5. En autonomie	13
6. Approfondissement	14
7. Type DS ou concours	14
Bilan	15

1. Définitions

Définition 1 (Fonction réelle d'une variable réelle)

On dit que f est une fonction réelle d'une variable réelle s'il existe I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ pour lequel à tout nombre $x \in I$, on peut associer une valeur réelle notée $f(x)$ et appelée **image** de x par f . On note :

$$f : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

Définition 2

- ✓ Le **domaine de définition** de f est l'ensemble de tous les nombres réels x pour lesquels $f(x)$ existe. Il se note généralement $\mathcal{D}_f$.
- ✓ On appelle **ensemble image de f** l'ensemble des **images** par f des éléments de $\mathcal{D}_f$, i.e. c'est l'ensemble des éléments pour lesquels il existe un **antécédent** dans $\mathcal{D}_f$:

$$\{f(x) \mid x \in \mathcal{D}_f\}$$

- ✓ L'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ où x est un élément de $\mathcal{D}_f$, est la **courbe représentative** de f .

Remarque 3 :

- ✓ Les polynômes, l'exponentielle, la valeur absolue et la partie entière n'ont aucune valeur interdite
- ✓ $f(x)$ est l'image du nombre x par f et certainement pas une fonction. Lorsque vous voulez parler de la fonction, c'est f et rien d'autre!
- ✓ On considère la fonction $f : [2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Donner ensemble de départ, ensemble d'arrivée et ensemble image.

Méthode 4 (Vérifier que f est bien définie ou trouver le domaine de définition de f)

On regarde bien l'expression donnée pour $f(x)$. Si on a :

- ✓ un quotient :
- ✓ une racine carrée :
- ✓ du $\ln$:
- ✓ une fonction puissance :

Exemple 5 : Déterminer le domaine de définition des fonctions définies par $f(x) = (2x + 3)^{-4}$ et $g(x) = (2x + 3)^{-2,7}$.

Exemple 6 (Vérifier qu'une fonction est bien définie) : Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+1}}$. Montrer que f est bien définie.

Exemple 7 (Trouver le domaine de définition d'une fonction) : Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes.

1. On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 3}$.

2. On considère la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 3}$.

3. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 5)$.

2. Opérations usuelles sur les fonctions

Proposition 8 (Opérations sur les fonctions)

Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

✓ La somme de f et de g est la fonction notée $f + g$ définie sur I par :

$$\forall x \in I, (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

✓ Le produit de f et de g est la fonction notée fg définie sur I par :

$$\forall x \in I, (fg)(x) = f(x) \times g(x).$$

✓ Le produit du réel λ par la fonction f est la fonction notée λf définie sur I par :

$$\forall x \in I, (\lambda f)(x) = \lambda \times f(x).$$

(Opérations sur les fonctions (suite))

- ✓ Si de plus, pour tout $x \in I$, $g(x) \neq 0$, alors le quotient de f par g est la fonction notée $\frac{f}{g}$ définie sur I par :

$$\forall x \in I, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

- ✓ Si g est définie sur $f(I)$, la composée de f par g est la fonction notée $g \circ f$ et définie sur I par

$$\forall x \in I, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Exemple 9 : Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto 2x - 3$ $x \mapsto 4x^2 + 1$

Déterminons les fonctions $u = f - 5g$ et $v = 2fg$.

Remarque 10 : $f \circ g$ et $g \circ f$ sont rarement égales et peuvent ne pas être définies sur les mêmes domaines.

Exemple 11 (Composition de fonctions) :

1. Soient $f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 + 3 \end{cases}$ et $g: \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$.

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

2. Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = e^x$ et $g(x) = \sqrt{x-1}$. Déterminer l'ensemble de définition de $g \circ f$ puis donner l'expression de $(g \circ f)(x)$.

3. Parité, imparité

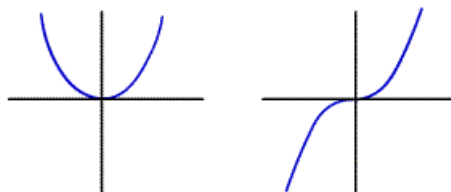
Définition 12 (Fonctions paires et impaires)

Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que

- ✓ f est **paire** ssi $\forall x \in \mathcal{D}_f, -x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = f(x)$.
- ✓ f est **impaire** ssi $\forall x \in \mathcal{D}_f, -x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Propriété 13 (Parité et symétrie)

- ✓ Si f est paire, alors sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet l'axe (Oy) pour axe de symétrie (i.e. l'axe des ordonnées).
- ✓ Si f est impaire, alors sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet O l'origine du repère pour centre de symétrie.



Méthode 14 (Étudier la parité d'une fonction)

On commence par regarder si le domaine de définition de la fonction est centré en 0, autrement dit si $x \in \mathcal{D}_f$, il faut que $-x \in \mathcal{D}_f$.

- ✓ Si $\mathcal{D}_f$ n'est pas centré, la fonction n'est ni paire, ni impaire.
- ✓ Si $\mathcal{D}_f$ est centré, deux cas se présentent :
 - pour montrer que f est paire ou impaire : on considère $x \in \mathcal{D}_f$ et on calcule $f(-x)$. On compare l'expression obtenue à $f(x)$ et $-f(x)$ pour conclure.
 - pour montrer que f n'est ni paire ni impaire : on cherche des contre-exemples. Autrement dit, on trouve un réel x tel que $f(-x) \neq f(x)$ et un réel y tel que $f(-y) \neq -f(y)$.

Exemple 15 : Étudier la parité des fonctions suivantes.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2;$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3;$$

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1.$$

Remarque 16 : La parité (ou imparité) d'une fonction f permet de réduire l'intervalle d'étude : il suffit d'étudier f sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$ et de déduire les variations et le signe de f sur $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_-$ par symétrie.

Proposition 17 (Fonction paire et impaire)

Si f est une fonction à la fois paire et impaire, alors f est la fonction nulle.

Proposition 18 (Parité et opérations)

Soient $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

1. Si f et g sont paires, alors $f + g$ et fg sont paires.
2. Si f et g sont impaires, alors $f + g$ est impaire et fg est paire.

4. Sens de variations

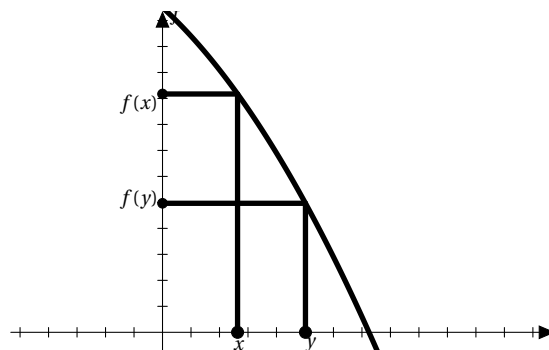
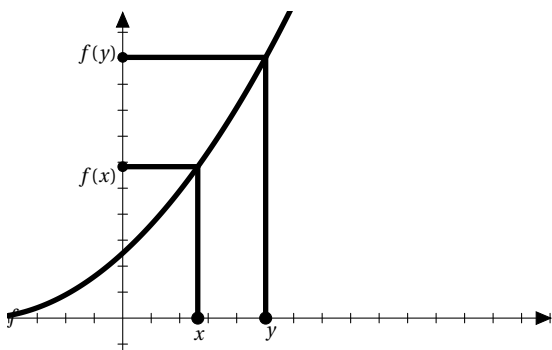
Définition 19 (Sens de variation)

Une fonction $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ est dite :

- ✓ strictement croissante ssi $\forall (x, y) \in \mathcal{D}_f^2, x < y \implies f(x) < f(y)$,
- ✓ strictement décroissante ssi $\forall (x, y) \in \mathcal{D}_f^2, x < y \implies f(x) > f(y)$,
- ✓ strictement monotone ssi f est strictement croissante ou strictement décroissante.

On parle des fonction croissante, décroissante, monotone si elle vérifie l'une des définitions ci-dessus avec des inégalités larges.

Remarque 20 : Les fonctions croissantes sont donc les fonctions qui conservent l'ordre alors que les fonctions décroissantes renversent l'ordre.



Remarque 21 : Il est possible qu'une fonction ne soit ni croissante ni décroissante. Ainsi, la négation de « f est croissante » n'est pas « f est décroissante ». Quelle est-elle d'ailleurs?

Propriété 22 (Opérations et monotonie)

1. La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante).
2. La multiplication d'une fonction monotone par un réel positif conserve le sens de variations.
3. La multiplication d'une fonction monotone par un réel négatif change le sens de variations.
4. La composée de deux fonctions ayant même sens de variations est croissante.
5. La composée de deux fonctions ayant des sens de variations opposés est décroissante.

Exemple 23 :

- ✓ $x \mapsto \sqrt{x} + \ln(x)$ est
- ✓ $x \mapsto -3e^x + \frac{3}{x}$ est
- ✓ Montrer que $x \mapsto e^{-x^2}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. En déduire le sens de variation de $x \mapsto x - e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque 24 : Le produit de deux fonctions croissantes n'est pas toujours croissant. Par exemple, si l'on considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$, f et g sont croissantes mais $f \times g$ qui est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f \times g(x) = x^2$ n'est pas croissante. En effet, la fonction $f \times g$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 25 : Quelle hypothèse sur les fonctions f et g doit-on rajouter pour que le produit de deux fonctions croissantes soit une fonction croissante ?

Méthode 26 (Utiliser les variations d'une fonction pour démontrer des inégalités)

On utilise très souvent les variations de fonctions pour justifier des inégalités. On part d'un résultat vrai, et on enchaîne des étapes avec des implications ou équivalences jusqu'à arriver à l'inégalité voulue.

Exemple 27 : Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $x > 3 \implies \ln\left(\frac{1}{x-2}\right) < 0$.

5. Extrema et bornes

Soit f une fonction définie sur un ensemble réel I .

Définition 28 (Majorant - minorant)

1. La fonction f est **majorée** (resp. **minorée**) sur I si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M \quad (\text{resp. } \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \geq m).$$

On dit alors que M (resp. m) majore (resp. minore) f sur I ou est un majorant (resp. minorant) de f sur I .

2. Une fonction à la fois majorée et minorée est dite **bornée** :

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in I, m \leq f(x) \leq M,$$

ce qui revient à :

$$\exists k \geq 0, \forall x \in I, |f(x)| \leq k.$$

Remarque 29 :

- ✓ Les réels m et M sont des constantes, ils ne doivent pas dépendre de x .
- ✓ Les majorants et les minorants n'existent pas toujours. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ n'a ni majorant ni minorant.
- ✓ Si une fonction admet un majorant ou un minorant, elle en admet une infinité. En effet, si 2 majore une fonction, tous les nombres au-dessus de 2 majorent aussi cette fonction. De même, si 0 minore une fonction, tous les nombres au-dessous de 0 minorent cette fonction.

Exemple 30 :

1. Soit $f: [-1, 2[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$.
2. La fonction exp
3. La fonction ln
4. Soit la fonction $g: x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Définition 31 (Maximum - minimum)

1. Soit x_0 un élément de I . On dit que f admet un **maximum** (resp. **minimum**) en x_0 sur I si :

$$\forall x \in I, f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } \forall x \in I, f(x) \geq f(x_0)).$$

On note $\max_{x \in I} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\min_{x \in I} f(x) = f(x_0)$).

On appelle un **extremum** un maximum ou un minimum.

2. Lorsque cette propriété n'est pas réalisée sur l'intervalle I tout entier mais sur un intervalle ouvert contenant x_0 , on dit que f admet un **extremum local** en x_0 .

Exemple 32 : Soit $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$.

Remarque 33 :

1. On dit un *extremum* et des *extrema*.
2. Un extremum peut être atteint en plusieurs valeurs de x .
3. Si f a un maximum (resp. minimum), alors f est majorée (resp. minorée).
 Par contraposée, on obtient aussi par exemple :
 Par contre, la réciproque est fausse. Une fonction peut être majorée sans admettre de maximum.

Exemple 34 :

1. ln ...
2. exp ...

$$3. \text{ Soit } \begin{array}{lcl} f: [0,1[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

6. Dérivation et applications

6.1 Formules usuelles des dérivées

La notion de dérivation sera revue et approfondie au 2nd semestre : il faudra alors justifier (au moins brièvement) la dérivabilité d'une fonction avant de la dériver. Nous ne ferons ici que les rappels élémentaires.

Définition 35

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- ✓ **Nombre dérivé** : f est **dérivable** en a ssi $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. On appelle nombre dérivé de f en a et on note $f'(a)$ la valeur de cette limite.
- ✓ **Fonction dérivable** : Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point de I . Dans ce cas, $f': x \in I \mapsto f'(x)$ est la fonction dérivée de f sur I .
- ✓ **Tangente** : la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = a$ a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Proposition 36 (Opérations sur les dérivées)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $(u + v)' = u' + v'$
2. $(\lambda u)' = \lambda u'$
3. $(uv)' = u'v + uv'$
4. Si v ne s'annule pas, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
5. En particulier, si v ne s'annule pas, $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

Proposition 37

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. $(e^u)' = u' e^u$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, (u^n)' = nu' u^{n-1}$
3. En particulier, $(u^2)' = 2uu'$
4. Si u ne s'annule pas, $\forall n \in \mathbb{Z}, (u^n)' = nu^{n-1} u'$

Proposition 38

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs strictement positives.

1. $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$
2. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
3. En particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

6.2 Variations

On utilise très souvent la dérivée pour étudier le sens de variation des fonctions. Rappelons le théorème qui fait le lien entre les variations de f et le signe de f' .

Théorème 39 (Variations et dérivée)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I .

1. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .
2. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .
3. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .

Si les inégalités ci-dessus sont *strictes*, la fonction sera *strictement* croissante (ou *strictement* décroissante)

Proposition 40

1. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ et si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur I , alors f est strictement croissante sur I .
2. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$ et si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur I , alors f est strictement décroissante sur I .

Exemple 41 : Étudier le sens de variation des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $f : x \mapsto -x - e^{x^2}$ sur $\mathbb{R}_+$.

6.3 Extrema

Très souvent, pour étudier les extrema d'une fonction f , on dérivera f puis on dressera son tableau de variations.

Théorème 42

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Si f' s'annule et change de signe en $a \in I$, alors f admet un extremum local en a .

Exercice 43 : La fonction $f : x \mapsto 3x^2 + 2x + 1$ admet-elle des extrema sur $[-1, 1]$?

6.4 Démontrer des inégalités

Méthode 44 (Démontrer une inégalité en étudiant une fonction)

Pour montrer une inégalité $f(x) \leq g(x)$ (ou $f(x) < g(x)$) :

- poser $h(x) = g(x) - f(x)$ et étudier la fonction h
- dériver h , obtenir ses variations et prouver que h admet un minimum m positif
- conclure : pour tout x , $h(x) \geq m \geq 0$, donc $g(x) - f(x) \geq 0$, d'où $f(x) \leq g(x)$

Exercice 45 : (important)

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$.
2. Montrer que $\forall x > -1, \ln(1 + x) \leq x$.

TD

1. Ensemble de définition et calculs de dérivées

☀ **Exercice 1** (Ensembles de définition) : Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x \ln(x)$

2. $f(x) = \frac{\ln(e^{-2x} - e^5)}{e^{2x} + 1}$

3. $f(x) = \frac{1}{\ln(x-2)}$

☀ **Exercice 2** (Quelques images) : Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto x^2 \ln(x)$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?

2. Quelles sont les images par f de $e, e^{-1}, \sqrt{e}, e^2, e\sqrt{e}, e^{-2}, \frac{1}{\sqrt{e}}$?

3. 0 possède-t-il des antécédents par f ?

☀ **Exercice 3** (Dérivation) : Donner le domaine de définition des fonctions suivantes et donner l'expression de la dérivée. On supposera que les fonctions sont bien dérivables sur leur domaine de définition.

1. $a(x) = 6x^4 - 3x^3 - x^2 + 7$

4. $d(x) = \exp\left(x + \frac{1}{x}\right)$

7. $g(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$

2. $b(x) = \ln(1 + x^2)$

5. $e(x) = x^{\sqrt{x}}$

8. $h(x) = \ln(\ln(x))$

3. $c(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

6. $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - x - 6}$

9. $i(x) = \frac{x}{\ln(x)}$

2. Fonctions paires, impaires

☀ **Exercice 4** (Parité, imparité) : Que dire de la parité des fonctions suivantes ?

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

3. $f : x \mapsto \frac{x}{4 - x^2}$

2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x+1)^4 - (x-1)^4$

4. $f : x \mapsto \frac{1}{x-3}$

☀ **Exercice 5** (Parité et opérations) : Soient $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

1. Montrer que si f et g sont paires, alors $f+g$ et fg sont paires.

2. Montrer que si f et g sont impaires, alors $f+g$ est impaire et fg est paire.

☀ **Exercice 6** : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction paire. On suppose que la restriction de f à $\mathbb{R}_-$ est croissante. Que dire de la monotonie de la restriction de f à $\mathbb{R}_+$?

☀ **Exercice 7** : Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont à la fois paires et impaires.

3. Composée de fonctions

☀ **Exercice 8** (Composition) : On note $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 1+x$ et $g(x) = x^2$. Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

☀ **Exercice 9** (Composition et dérivation) : Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$, $g : x \mapsto 3x + 1$ et $h : x \mapsto \sqrt{x} + 2$.

1. Donner les domaines de définition de f, g, h .

2. En précisant le domaine de définition, donner les expressions des fonctions composées $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$, $h \circ f$, $g \circ h$ et $h \circ g$.
3. Calculer les dérivées de chaque fonction composée.

4. Étude de fonctions

☀ **Exercice 10** : On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^3$. Sans calculer sa dérivée, étudier ses variations sur $]0; +\infty[$.

☀ **Exercice 11** (Une étude de fonction) : Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$.

1. (a) Résoudre l'équation $X^2 - X + 1 = 0$.
(b) En déduire le signe du trinôme $X^2 - X + 1$.
(c) Déterminer $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de f .
2. (a) On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}$.
Calculer la dérivée de f . Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
(b) En déduire les variations de f .
3. Résoudre $f(x) = 0$.
4. Faire un tableau de variations pour récapituler, en précisant la valeur de l'extremum.
5. Donner l'expression de la tangente en $x = 0$ à la courbe représentative de f .

☀ **Exercice 12** (x^x) : Soit f la fonction définie par $f(x) = x^x$.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction f ?
2. Déterminer sa dérivée $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
3. En déduire le signe de $f'(x)$ ainsi que le sens de variation de f .
4. Résoudre l'équation $f(x) = 1$.

5. En autonomie

🏠 ☀ **Exercice 13** (Ensembles de définition) : Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \ln(x^2 + 2x - 3)$
2. $f(x) = \frac{3x+2}{-2x+5}$
3. $f(x) = \sqrt{\frac{9-x^2}{e^x-1}}$ ☀

🏠 ☀ **Exercice 14** (Dérivées) : Donner l'ensemble de définition de ces fonctions. Calculer également leur dérivée. On ne demande pas de déterminer l'ensemble de dérivabilité.

1. $a(x) = \frac{x^2}{x+1}$
2. $b(x) = \ln(3+x) - \ln(4-2x) - \ln(2)$
3. $c(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2+4}}$
4. $d(x) = e^{2\ln(x)}$
5. $e(x) = \ln(1 + e^{-x})$
6. $f(x) = x \ln(x)$
7. $g(x) = e^{x^2}$
8. $h(x) = \ln(x^2 - 1) - \ln(x^2 + 1)$
9. $i(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$
10. $j(x) = x + 1 + \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$

🏠 ☀ **Exercice 15** (Parité, imparité) : Que dire de la parité des fonctions suivantes ?

$$1. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2+1} \quad \text{☀}$$

$$2. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x(2x+3)^2 \ln(x^2+1)$$

$$3. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$4. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \left(\frac{1}{x^2+1} \right)^2 \times \frac{x^3}{\sqrt{3x^2+5}}$$

$$5. f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\ln(|x|)}{e^{x^2} + x^4 + 1} \quad \text{☀}$$

🏠 ☀ **Exercice 16** (Composition) : On note f, g , les applications définies par $f(x) = 1+x$ et $g(x) = \sqrt{x-2}$.

- Déterminer les ensembles de définition de f et g .
- Déterminer les ensembles de définition de $f \circ g$ et $g \circ f$, puis leur expression algébrique.

6. Approfondissement

☀ **Exercice 17** (Parité, imparité) : Que dire de la parité des fonctions suivantes?

$$1. a(x) = \ln \left(\left| \frac{x+1}{x-1} \right| \right)$$

$$2. f(x) = \frac{x^2}{\exp(x) - \exp(-x)}$$

$$3. g(x) = \frac{x}{2} - \ln(\exp(x) + 1)$$

☀ **Exercice 18** (Un peu de symétrie) :

- Montrer que la fonction $f: x \mapsto -x + \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ admet une représentation graphique symétrique par rapport à l'origine.
- Montrer que la fonction $g: x \mapsto \frac{x^4 - x^2 - 2}{x^8 - x^6 + 1}$ admet une courbe représentative symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. ☀

☀ **Exercice 19** (Décomposition paire + impaire) :

- Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et impaire.
- Montrer que cette décomposition est unique.

7. Type DS ou concours

☀ **Exercice 20** (D'après HEC) : Soit $a \geq 0$. On note P_a la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $P_a(x) = x^3 + ax - 1$ et on admet que l'équation $P_a(x) = 0$ admet une unique solution réelle. On la note $u(a)$ et on considère alors la fonction u définie sur $\mathbb{R}_+$ qui à tout réel positif a associe $u(a)$.

- Déterminer le sens de variations de la fonction P_a .
- En comparant $P_a(u(a))$ et $P_a(0)$, montrer que $\forall a \geq 0, u(a) > 0$.
- (a) Montrer que, pour tous réels positifs a et b , $P_a(u(b)) = (a-b)u(b)$.
(b) En déduire le sens de variation de la fonction u .

☀ **Exercice 21** (d'après ESCP) : Soit f la fonction définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = x - \ln(x)$.

- Déterminer l'expression $f'(x)$ pour tout x strictement positif.
- Donner le tableau de variation de la fonction f .
- En déduire que $\forall x > 0, f(x) > 0$.
- Déterminer l'expression $f''(x)$ pour tout x strictement positif.
- En déduire les variations de f' .
- Établir pour tout x dans $[1, 2]$ les inégalités suivantes, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

Bilan

- ✓ **Déterminer un ensemble de définition** Il faut retenir qu'il y a surtout 3 cas qui peuvent présenter des « problèmes » : $\ln(u)$ (il faut $u > 0$), $\sqrt{u}$ (il faut $u \geq 0$) et $\frac{1}{u}$ (il faut $u \neq 0$).
 ▶ Cours : méthode 4 + ex 5-6-7 ; TD : exo 1, 2 et 3 (avant la dérivation)

- ✓ **La composition de fonctions** Se rappeler que $f \circ g$ et $g \circ f$ peuvent être différentes et peuvent ne pas avoir les mêmes ensembles de définition.
 ▶ Cours : rem 10-ex 11 ; TD : exo 8 et 9

- ✓ **Les fonctions paires et impaires** Il faut toujours penser à vérifier que le domaine de définition est symétrique. S'il n'est pas donné, il faut donc commencer par le chercher. Et ensuite, on vérifie la propriété adéquate.
 ▶ Cours : méthode 14 + ex 15 ; TD : exo 4, 5 et 6

- ✓ **Variations d'une fonction** Soit on utilise *correctement* les opérations sur les variations de fonctions usuelles, soit on dérive et on étudie le signe de la dérivée. On applique alors la proposition :
 Si $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) et si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points sur I , alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
 ▶ Cours : ex 41 ; TD : exos 11 et 12 (études de fonctions complètes)
 Il est bien évidemment nécessaire de CONNAÎTRE PAR COEUR LES DÉRIVÉES USUELLES.
 ▶ TD : exo 3

- ✓ **Bornes et extrema** Ne pas confondre les bornes (majorants et minorants) avec les extrema (maximum et minimum). Un extremum est toujours atteint alors qu'une borne ne l'est pas toujours.
 N'oubliez pas de les mettre dans les tableaux de variations : c'est comme cela que vous montrez qu'une fonction est toujours supérieure ou inférieure à une certaine valeur.
 Pour que f admette un extremum local, on peut prouver que f s'annule et change de signe.
 ▶ Cours : ex 30-32-34 + rem 33 + th 42 + ex 43 ; TD : exo 11

- ✓ **Montrer des inégalités** Pour montrer que $f(x) \leq g(x)$, on étudie les variations de la fonction $g - f$ et on montre qu'elle est toujours positive grâce aux valeurs des extrema.
 ▶ Cours : exos 45-46
 On montre une implication ou une équivalence avec une inégalité, on part de l'inégalité de départ et on enchaîne les implications ou les équivalences que l'on justifie à l'aide des variations des fonctions usuelles (par exemple, appliquer l'exponentielle ne change pas le sens d'une inégalité car la fonction exponentielle est croissante alors que prendre l'inverse change le sens d'une inégalité car la fonction inverse est décroissante sur chaque intervalle où elle est définie.)
 ▶ Cours : ex 27

