

CHAPITRE 3

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS - CORRECTION

1. Ensemble de définition et calculs de dérivées

☀ **Exercice 1** (Ensembles de définition) : Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x \ln(x)$

2. $f(x) = \frac{\ln(e^{-2x} - e^5)}{e^{2x} + 1}$

3. $f(x) = \frac{1}{\ln(x-2)}$

1. $f(x) = x \ln(x)$ définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$.

2. $f(x) = \frac{\ln(e^{-2x} - e^5)}{e^{2x} + 1}$ est définie ssi $e^{-2x} - e^5 > 0$ et $e^{2x} + 1 \neq 0$. La deuxième condition est satisfaite pour tout réel x , on étudie donc la première.

$$e^{-2x} - e^5 > 0 \Leftrightarrow e^{-2x} > e^5 \Leftrightarrow -2x > 5 \Leftrightarrow x < -\frac{5}{2}.$$

Donc f est définie sur $\mathcal{D} = \left] -\infty; -\frac{5}{2} \right[$

3. $f(x) = \frac{1}{\ln(x-2)}$ définie ssi $x-2 > 0$ et $\ln(x-2) \neq 0$.

On a $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

De plus, $\ln(x-2) = 0 \Leftrightarrow x-2 = e^0 = 1 \Leftrightarrow x = 3$.

On en déduit que f est définie si $x > 2$ et $x \neq 3$.

Donc $\mathcal{D} =]2; 3[\cup]3; +\infty[=]2; +\infty[- \{3\}$.

☀ **Exercice 2** (Quelques images) : Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto x^2 \ln(x)$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?

2. Quelles sont les images par f de $e, e^{-1}, \sqrt{e}, e^2, e\sqrt{e}, e^{-2}, \frac{1}{\sqrt{e}}$?
3. 0 possède-t-il des antécédents par f ?

1. $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$.
2. $f(e) = e^2$
 $f(e^{-1}) = e^{-2} \ln(e^{-1}) = -e^{-2} = -\frac{1}{e^2}$
 $f(\sqrt{e}) = e \ln(\sqrt{e}) = \frac{e}{2}$
 $f(e^2) = e^4 \ln(e^2) = 2e^4$
 $f(e\sqrt{e}) = f(e^{3/2}) = e^3 \ln(e^{3/2}) = \frac{3}{2}e^3$
 $f(e^{-2}) = e^{-4} \ln(e^{-2}) = -2e^{-4} = -\frac{2}{e^4}$
 $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = f(e^{-1/2}) = e^{-1} \ln(e^{-1/2}) = -\frac{1}{2}e^{-1} = -\frac{1}{2e}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. On peut diviser par x car il est non nul, voir ensemble de définition de f .
 Donc $\boxed{0 \text{ possède un unique antécédent, } 1, \text{ par la fonction } f}$.

 **Exercice 3** (Dérivation) : Donner le domaine de définition des fonctions suivantes et donner l'expression de la dérivée. On supposera que les fonctions sont bien dérivables sur leur domaine de définition.

- | | | |
|-----------------------------------|--|---|
| 1. $a(x) = 6x^4 - 3x^3 - x^2 + 7$ | 4. $d(x) = \exp\left(x + \frac{1}{x}\right)$ | 7. $g(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$ |
| 2. $b(x) = \ln(1 + x^2)$ | 5. $e(x) = x^{\sqrt{x}}$ | 8. $h(x) = \ln(\ln(x))$ |
| 3. $c(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ | 6. $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - x - 6}$ | 9. $i(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ |

1. $a(x) = 6x^4 - 3x^3 - x^2 + 7$ définie sur $\mathbb{R}$. On trouve $a'(x) = 24x^3 - 9x^2 - 2x$
2. $b(x) = \ln(1 + x^2)$ définie sur $\mathbb{R}$. On trouve $b'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$
3. $c(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$. On trouve $c'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$
4. $d(x) = \exp\left(x + \frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$. On trouve $d'(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{1 + \frac{1}{x}}$
5. $e(x) = x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x} \ln(x)}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On trouve $e'(x) = \left(\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) e^{\sqrt{x} \ln x}$
6. $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - x - 6}$ définie sur $\mathbb{R} - \{-2; 3\}$. On trouve $f'(x) = \frac{-x^2 - 4x - 4}{(x^2 - x - 6)^2}$
 Autre solution : on commence par simplifier : $f(x) = \frac{x+2}{(x+2)(x-3)} = \frac{1}{x-3}$. Donc $f'(x) =$

$\frac{-1}{(x-3)^2}$. On peut vérifier que cette formule est égale à celle trouvée ci-dessus, après simplification.

7. $g(x) = \ln(x + \frac{1}{x})$ définie sur $\mathbb{R}^*$. On trouve $g'(x) = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x + \frac{1}{x}} = \frac{x^2 - 1}{x^3 + x}$

8. $h(x) = \ln(\ln(x))$ définie sur $]1; +\infty[$. On trouve $h'(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$.

9. $i(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ définie sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$. On trouve $i'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}$

2. Fonctions paires, impaires

☼ **Exercice 4** (Parité, imparité) : Que dire de la parité des fonctions suivantes?

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

3. $f : x \mapsto \frac{x}{4 - x^2}$

2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x+1)^4 - (x-1)^4$

4. $f : x \mapsto \frac{1}{x-3}$

On n'oublie pas de vérifier que l'ensemble de définition est centré en 0. Si ce n'est pas le cas, $f(-x)$ n'est pas toujours défini, inutile de commencer les calculs.

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\mathcal{D}_f$ est centré en 0 et on a pour $x \in \mathcal{D}_f$:

$$f(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x)$$

Donc f est paire.

2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x+1)^4 - (x-1)^4$

$\mathcal{D}_f$ est centré en 0 et on a pour $x \in \mathcal{D}_f$:

$$f(-x) = (-x+1)^4 - (-x-1)^4 = (x-1)^4 - (x+1)^4 = -(x+1)^4 + (x-1)^4 = -f(x).$$

Donc f est impaire.

On a $(-x-1)^4 = ((-1)(x+1))^4 = (-1)^4(x+1)^4$ et on remarque que $(-1)^4 = 1$.

3. $f : x \mapsto \frac{x}{4 - x^2}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ est centré en 0 et on a pour $x \in \mathcal{D}_f$:

$$f(-x) = \frac{-x}{4 - (-x)^2} = -\frac{x}{4 - x^2} = -f(x)$$

Donc f est impaire.

4. $f : x \mapsto \frac{1}{x-3}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ n'est pas centré en 0. En effet, $-3 \in \mathcal{D}_f$ mais $3 \notin \mathcal{D}_f$.

Donc f n'est ni paire, ni impaire.

☼ **Exercice 5** (Parité et opérations) : Soient $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

1. Montrer que si f et g sont paires, alors $f + g$ et fg sont paires.

2. Montrer que si f et g sont impaires, alors $f + g$ est impaire et fg est paire.

1. Supposons que les fonctions f et g sont paires. Alors $\mathcal{D}$ est centré en 0 et on a $\forall x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = f(x)$ et $g(-x) = g(x)$.

La fonction $f + g$ est définie sur $\mathcal{D}$ centré en 0. De plus pour $x \in \mathbb{D}$ on a

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) \text{ par parité de } f \text{ et } g.$$

$$\text{Donc } (f + g)(-x) = (f + g)(x).$$

La fonction $f + g$ est donc paire.

Par ailleurs, la fonction fg est définie sur $\mathcal{D}$ centré en 0. De plus pour $x \in \mathbb{D}$ on a

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) \text{ par parité de } f \text{ et } g.$$

$$\text{Donc } (fg)(-x) = (fg)(x).$$

La fonction fg est donc paire.

2. Supposons que les fonctions f et g sont impaires. Alors $\mathcal{D}$ est centré en 0 et on a $\forall x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = -f(x)$ et $g(-x) = -g(x)$.

La fonction $f + g$ est définie sur $\mathcal{D}$ centré en 0. De plus pour $x \in \mathcal{D}$ on a

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) \text{ par imparité de } f \text{ et } g.$$

$$\text{Donc } (f + g)(-x) = -(f + g)(x).$$

La fonction $f + g$ est donc impaire.

Par ailleurs, la fonction fg est définie sur $\mathcal{D}$ centré en 0. De plus pour $x \in \mathbb{D}$ on a

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) \text{ par parité de } f \text{ et } g.$$

$$\text{Donc } (fg)(-x) = (fg)(x).$$

La fonction fg est donc paire.

☀ **Exercice 6 :** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction paire. On suppose que la restriction de f à $\mathbb{R}_-$ est croissante. Que dire de la monotonie de la restriction de f à $\mathbb{R}_+$?

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ tels que $x < y$. On a alors $-x \in \mathbb{R}_-$ et $-y \in \mathbb{R}_-$ et ces deux nombres vérifient $-x > -y$. De plus, f est croissante sur $\mathbb{R}_-$. Par définition, on a donc $f(-x) > f(-y)$. Par parité de f , on en déduit que $f(x) > f(y)$.

On a montré que si x et y sont deux réels positifs tels que $x < y$, alors $f(x) > f(y)$. On en déduit que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

☀ **Exercice 7 :** Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont à la fois paires et impaires.

On raisonne par analyse-synthèse.

Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui soit à la fois paire et impaire.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a donc $f(-x) = f(x)$ et $f(-x) = -f(x)$. Par conséquent, $f(x) = -f(x)$. On en déduit que $f(x) = 0$.

On a donc montré que si f est à la fois paire et impaire, alors f est la fonction nulle. Par ailleurs,

on vérifie que la fonction nulle est à la fois paire et impaire.

Ainsi, la fonction nulle est la seule fonction qui soit à la fois paire et impaire.

3. Composée de fonctions

☀ **Exercice 8** (Composition) : On note $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x$ et $g(x) = x^2$. Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Les fonctions f et g étant définies sur $\mathbb{R}$, leurs composée $f \circ g$ et $g \circ f$ existent et sont définies sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 1 + x^2$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(1 + x) = (1 + x)^2.$$

On remarque que $f \circ g \neq g \circ f$. Par exemple, $f \circ g(1) = 1$ et $g \circ f(1) = 4$.

L'exemple numérique est indispensable. Il permet de prouver que les deux expressions obtenues sont bien différentes, et non deux écritures du même résultat.

☀ **Exercice 9** (Composition et dérivation) : Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$, $g : x \mapsto 3x + 1$ et $h : x \mapsto \sqrt{x} + 2$.

1. Donner les domaines de définition de f, g, h .
2. En précisant le domaine de définition, donner les expressions des fonctions composées $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$, $h \circ f$, $g \circ h$ et $h \circ g$.
3. Calculer les dérivées de chaque fonction composée.

1. On détermine $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}_+$

2. On trouve

$$\mathcal{D}_{f \circ g} = \mathbb{R}, \text{ et } f \circ g(x) = f(3x + 1) = \frac{1}{(3x + 1)^2 + 1}$$

$$\mathcal{D}_{g \circ f} = \mathbb{R}, \text{ et } g \circ f(x) = g\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right) = \frac{3}{x^2 + 1} + 1$$

$$\mathcal{D}_{f \circ h} = \mathbb{R}_+, \text{ et } f \circ h(x) = f(\sqrt{x} + 2) = \frac{1}{(\sqrt{x} + 2)^2 + 1}$$

$$\mathcal{D}_{h \circ f} = \mathbb{R}, \text{ et } h \circ f(x) = h\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right) = \sqrt{\frac{1}{x^2 + 1}} + 2$$

$$\mathcal{D}_{g \circ h} = \mathbb{R}_+, \text{ et } g \circ h(x) = g(\sqrt{x} + 2) = 3(\sqrt{x} + 2) + 1 = 3\sqrt{x} + 7$$

$$\mathcal{D}_{h \circ g} = \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right[\text{ et } h \circ g(x) = h(3x + 1) = \sqrt{3x + 1} + 2$$

3. On peut dériver directement les fonctions obtenues à la question précédente. Les expressions étant souvent compliquées, il peut être plus simple d'utiliser la formule des fonctions composées $(u \circ v)' = v' \times u' \circ v$. Cela allégera (un peu) les calculs et évitera certaines erreurs.

On détermine que pour x dans les ensemble de définitions de chaque fonction,

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}, \quad g'(x) = 3, \quad \text{et } h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

On a donc, pour x dans les ensemble de définitions de chaque fonction,

$$(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x)) = 3 \frac{-2(3x+1)}{(3x+1)^2 + 1)^2} = \frac{-6(3x+1)}{(9x^2 + 2x + 2)^2}$$

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \times 3 = \frac{-6x}{(x^2+1)^2}$$

$$(f \circ h)'(x) = h'(x)f'(h(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{-2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)^2 + 1)^2}$$

$$(h \circ f)'(x) = f'(x)h'(f(x)) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}} = \frac{-x\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^2}$$

$$(g \circ h)'(x) = h'(x)g'(h(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 3 = \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

$$(h \circ g)'(x) = g'(x)h'(g(x)) = 3 \frac{1}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

4. Étude de fonctions

☼ **Exercice 10 :** On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^3$. Sans calculer sa dérivée, étudier ses variations sur $]0; +\infty[$.

La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Par composition avec la fonction carré qui est strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est strictement décroissante sur $\mathcal{D}$.

Par somme de fonctions strictement décroissantes, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ est strictement décroissante.

De plus, la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par composition, on conclut que la fonction f est strictement croissante sur $\mathcal{D}$.

☼ **Exercice 11** (Une étude de fonction) : Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$.

1. (a) Résoudre l'équation $X^2 - X + 1 = 0$.
 (b) En déduire le signe du trinôme $X^2 - X + 1$.
 (c) Déterminer $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de f .
2. (a) On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}$.
 Calculer la dérivée de f . Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
 (b) En déduire les variations de f .
3. Résoudre $f(x) = 0$.
4. Faire un tableau de variations pour récapituler, en précisant la valeur de l'extremum.
5. Donner l'expression de la tangente en $x = 0$ à la courbe représentative de f .

1. (a) On trouve un discriminant strictement négatif, donc l'ensemble des solutions de $X^2 - X + 1 = 0$ est $S = \emptyset$.
- (b) Le trinôme $X^2 - X + 1 = 0$ n'a aucune racine et un coefficient dominant strictement positif. On en déduit que $X^2 - X + 1 > 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}$.
- (c) En utilisant le changement de variable $X = e^x$, on montre que $e^{2x} - e^x + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, f est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

2. (a) Soit $x \in \mathcal{D}$. On a

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$$
On a utilisé la formule $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
On en déduit que pour $x \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned}
 f'(x) > 0 &\iff \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1} > 0 \\
 &\iff 2e^{2x} - e^x > 0 \quad \text{en multipliant par } e^{2x} - e^x + 1 > 0 \\
 &\iff 2e^{2x} > e^x \\
 &\iff 2e^x > 1 \quad \text{en divisant par } e^x \\
 &\iff e^x > \frac{1}{2} \\
 &\iff x > \ln(1/2) \quad \text{en appliquant la fonction } \ln \text{ qui est croissante} \\
 &\iff x > -\ln(2)
 \end{aligned}$$

On en déduit que f' est strictement positive sur $] -\ln(2); +\infty[$
et strictement négative sur $] -\infty; -\ln(2)[$.

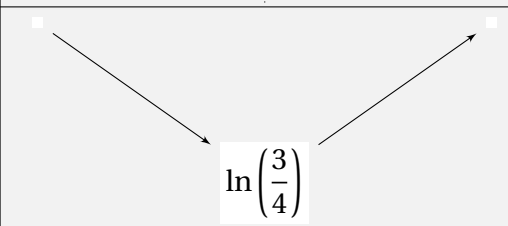
- (b) Une fonction est strictement croissante (resp. décroissante) si sa dérivée est strictement positive (resp. négative).
On en déduit que f est strictement croissante sur $] -\ln(2); +\infty[$
et strictement décroissante sur $] -\infty; -\ln(2)[$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
 f(x) = 0 &\iff \ln(e^{2x} - e^x + 1) = 0 \\
 &\iff e^{2x} - e^x + 1 = 1 \quad \text{en appliquant la fonction exponentielle, bijective sur } \mathbb{R} \\
 &\iff e^{2x} - e^x = 0 \\
 &\iff e^x(e^x - 1) = 0 \\
 &\iff e^x - 1 = 0 \quad \text{en divisant par } e^x > 0 \\
 &\iff e^x = 1 \\
 &\iff x = 0 \quad \text{en appliquant la fonction } \ln \text{ strictement croissante}
 \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de $f(x) = 0$ est $S = \{0\}$.

4.

x	$-\infty$	$-\ln(2)$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

5. La tangente à la courbe représentative de f en $x = 0$ admet pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

$$\text{Or } f'(0) = \frac{2e^0 - e^0}{e^0 - e^0 + 1} = \frac{2 - 1}{1 - 1 + 1} = 1 \text{ et } f(0) = 0.$$

Donc l'équation de cette tangente est $y = x$.

☀ **Exercice 12** (x^x) : Soit f la fonction définie par $f(x) = x^x$.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction f ?
2. Déterminer sa dérivée $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
3. En déduire le signe de $f'(x)$ ainsi que le sens de variation de f .
4. Résoudre l'équation $f(x) = 1$.

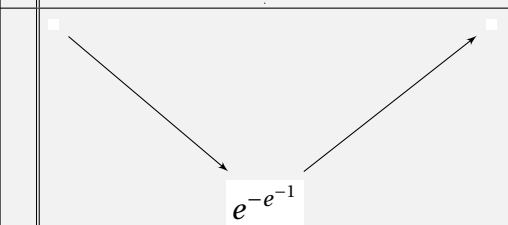
1. On a $f(x) = x^x = \exp(x \ln(x))$ définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$.

2. Pour $x \in \mathcal{D}$ on a

$$f'(x) = (1 + \ln(x)) \exp(x \ln(x)).$$

3. Pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a $\exp(x \ln(x)) > 0$

$$\text{Donc } f(x) > 0 \iff 1 + \ln(x) > 0 \iff x > e^{-1}.$$

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$		0	$+$
$f(x)$			

4. Pour $x \in \mathcal{D}$ on a

$$\begin{aligned}
 f(x) = 1 &\iff \exp(x \ln(x)) = 1 \\
 &\iff x \ln(x) = 0 \\
 &\iff \ln(x) = 0 \text{ car } x \neq 0 \\
 &\iff x = 1
 \end{aligned}$$

On obtient donc $S = \{1\}$

5. En autonomie

  **Exercice 13** (Ensembles de définition) : Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \ln(x^2 + 2x - 3)$

2. $f(x) = \frac{3x+2}{-2x+5}$

3. $f(x) = \sqrt{\frac{9-x^2}{e^x-1}}$ 

1. $f(x) = \ln(x^2 + 2x - 3)$ est définie ssi $x^2 + 2x - 3 > 0$. On recherche les racines de ce polynôme, on obtient -3 et 1 . Comme le coefficient dominant est positif, ce polynôme est positif à l'extérieur des racines.

Donc f est définie sur $\mathcal{D} =]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$.

2. $f(x) = \frac{3x+2}{-2x+5}$ est définie ssi $-2x+5 \neq 0$.

Donc f est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

3. $f(x) = \sqrt{\frac{9-x^2}{e^x-1}}$ est définie ssi $e^x - 1 \neq 0$ et $\frac{9-x^2}{e^x-1} \geq 0$.

On a $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

De plus, $9 - x^2 \geq 0$ pour $x \in [-3; 3]$ et $e^x - 1 > 0$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. On peut dresser un tableau de signes pour déterminer le signe de ce quotient : il est positif sur $] -\infty; -3[\cup]0; 3]$.

Donc f est définie sur $\mathcal{D} =]-\infty; -3[\cup]0; 3]$.

  **Exercice 14** (Dérivées) : Donner l'ensemble de définition de ces fonctions. Calculer également leur dérivée. On supposera que les fonctions sont bien dérivables sur leur domaine de définition.

1. $a(x) = \frac{x^2}{x+1}$

2. $b(x) = \ln(3+x) - \ln(4-2x) - \ln(2)$

3. $c(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2+4}}$

4. $d(x) = e^{2\ln(x)}$

5. $e(x) = \ln(1 + e^{-x})$

6. $f(x) = x \ln(x)$

7. $g(x) = e^{x^2}$

8. $h(x) = \ln(x^2 - 1) - \ln(x^2 + 1)$

9. $i(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$

10. $j(x) = x + 1 + \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$

1. $a(x) = \frac{x^2}{x+1}$ définie sur $\mathcal{D}_a = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

on vérifie que le dénominateur soit non nul. On utilise ensuite la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Pour $x \in \mathcal{D}_a$ on a $a'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 \times 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

2. $b(x) = \ln(3+x) - \ln(4-2x) - \ln(2)$ est définie si $3+x > 0$ et $4-2x > 0$. On en déduit $\mathcal{D}_b =]-3; 2[$.

Chaque terme de b est de la forme $\ln(u)$, donc de dérivée $\frac{u'}{u}$. Le dernier terme est constant, donc sa dérivée est nulle. Inutile d'utiliser la formule pour dériver $\ln(u)$ dans ce cas!

Pour $x \in \mathcal{D}_b$ on a $b'(x) = \frac{1}{3+x} - \frac{-2}{4-2x} = \frac{1}{3+x} + \frac{2}{4-2x}$.

3. $c(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2+4}}$ est définie sur $\mathcal{D}_c = \mathbb{R}_+$ car $x^2+4 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on vérifie donc uniquement que le numérateur soit positif).

Ici on utilise la dérivée de $\sqrt{u}$ qui est $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Pour $x \in \mathcal{D}_c$ on pose $u(x) = \frac{x}{x^2+4}$. Alors $u'(x) = \frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2}$. On en déduit que pour $x \in \mathcal{D}_c$,

$$c'(x) = \frac{\frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2} \frac{\sqrt{x^2+4}}{2\sqrt{x}}$$

4. $d(x) = e^{2\ln(x)}$ est définie sur $\mathcal{D}_d = \mathbb{R}_+^*$.

Pour $x \in \mathcal{D}_d$, on a $d'(x) = \frac{2}{x} e^{2\ln(x)} = \frac{2}{x} x^2 = 2x$.

On peut aussi remarquer que pour $x \in \mathcal{D}_d$ on a $d(x) = e^{2\ln(x)} = x^2$. On peut donc dériver à partir de cette formule. Attention cependant : la fonction carré peut être définie sur $\mathbb{R}$. Mais ici la fonction d est définie uniquement sur $\mathbb{R}_+^*$ au vu de la formule par laquelle elle est définie dans l'énoncé.

5. $e(x) = \ln(1+e^{-x})$ est définie sur $\mathcal{D}_e = \mathbb{R}$. En effet, $1+e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathcal{D}_e$ on a $e'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{-1}{e^x+1}$.

La dernière égalité a été obtenue en multipliant par e^x le numérateur et le dénominateur. multiplication possible car $e^x \neq 0$.

6. $f(x) = x \ln(x)$ est définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.

Pour $x \in \mathcal{D}_f$ on a $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

7. $g(x) = e^{x^2}$ est définie sur $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathcal{D}_g$, on a $g'(x) = 2xe^{x^2}$.

8. $h(x) = \ln(x^2-1) - \ln(x^2+1)$ est définie ssi $x^2-1 > 0$ et $x^2+1 > 0$. On remarque que la dernière inégalité est toujours vraie, il reste à étudier le signe du trinôme x^2-1 . Les racines sont -1 et 1 . Ce trinôme est positif à l'extérieur de ces racines (coefficient dominant positif).

Donc h est définie sur $\mathcal{D}_h =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

Pour $x \in \mathcal{D}_h$, on a $h'(x) = \frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2+1} = 2x \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1} \right) = 2x \frac{x^2+1-(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{4x}{x^4-1}$

9. $i(x) = (x^2+x+1)e^{-x}$ est définie sur $\mathcal{D}_i = \mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathcal{D}_i$ on a $i'(x) = (2x+1)e^{-x} + (x^2+x+1)(-e^{-x}) = (-x^2+x)e^{-x} = x(1-x)e^{-x}$

10. $j(x) = x+1 + \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$ est définie ssi $x \neq -1$ et $\frac{x+2}{x+1} > 0$. On dresse un tableau de signe pour déterminer le signe de ce quotient : il est strictement positif sur $] -\infty; -2[\cup] -1; +\infty[$.

Donc j est définie sur $\mathcal{D}_j =]-\infty; -2[\cup]-1; +\infty[$.

$$\text{Pour } x \in \mathcal{D}_j \text{ on a } j'(x) = 1 + \frac{\frac{x+1-(x+2)}{(x+1)^2}}{\frac{x+2}{x+1}} = 1 + \frac{-1}{(x+1)^2} \frac{x+1}{x+2} = 1 - \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{x^2+3x+1}{(x+1)(x+2)}$$

🏠 ☀ **Exercice 15** (Parité, imparité) : Que dire de la parité des fonctions suivantes?

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ ☀
2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x(2x+3)^2 \ln(x^2+1)$
3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \left(\frac{1}{x^2+1} \right)^2 \times \frac{x^3}{\sqrt{3x^2+5}}$
5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\ln(|x|)}{e^{x^2} + x^4 + 1}$ ☀

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$
 $\mathcal{D}_f$ est centré en 0 et pour $x \in \mathcal{D}_f$ on a
 $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = f(x)$
 Donc f est paire.
2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x(2x+3)^2 \ln(x^2+1)$
 $\mathcal{D}_f$ est centré en 0. Mais on remarque que
 $f(1) = 25 \ln(2)$ et $f(-1) = -\ln(2)$.
 Donc $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1)$.
 On en déduit que f n'est ni paire ni impaire.
3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
 $\mathcal{D}_f$ est centré en 0 et pour $x \in \mathcal{D}_f$ on a
 $f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -f(x)$.
 Donc f est impaire.
4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \left(\frac{1}{x^2+1} \right)^2 \times \frac{x^3}{\sqrt{3x^2+5}}$
 $\mathcal{D}_f$ est centré en 0 et pour $x \in \mathcal{D}_f$ on a
 $f(-x) = \left(\frac{1}{(-x)^2+1} \right)^2 \frac{(-x)^3}{\sqrt{3(-x)^2+5}} = \left(\frac{1}{x^2+1} \right)^2 \frac{-x^3}{\sqrt{3x^2+5}} = -f(x)$
 Donc f est impaire.
5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\ln(|x|)}{e^{x^2} + x^4 + 1}$
 $\mathcal{D}_f$ est centré en 0 et pour $x \in \mathcal{D}_f$ on a
 $f(-x) = \frac{\ln(|-x|)}{e^{(-x)^2} + (-x)^4 + 1} = \frac{\ln(|x|)}{e^{x^2} + x^4 + 1} = f(x)$
 Donc f est paire.

🏠 ☀ **Exercice 16** (Composition) : On note f, g , les applications définies par $f(x) = 1+x$ et $g(x) = \sqrt{x-2}$.

1. Déterminer les ensembles de définition de f et g .
2. Déterminer les ensembles de définition de $f \circ g$ et $g \circ f$, puis leur expression algébrique.

1. La fonction f est polynomiale, elle n'a donc pas de valeur interdite. Donc $\mathcal{D}_f = \mathcal{E}$.

La fonction g est définie si $x - 2 \geq 0$ soit $x \geq 2$. Donc $DD_g = [2; +\infty[$.

2. $f \circ g(x)$ existe pour tout $x \in \mathcal{D}_g$ car f n'a pas de valeur interdite.

Donc $\mathcal{D}_{f \circ g} = [2; +\infty[$.

$g \circ f(x)$ est définie si $f(x) \in \mathcal{D}_g$ soit $x + 1 \geq 2 \iff x \geq 1$. Ainsi $\mathcal{D}_{f \circ g} = [1; +\infty[$.

Pour $x \geq 2$ on a

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-2}) = 1 + \sqrt{x-2}$$

Pour $x \geq 1$ on a

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x+1) = \sqrt{x+1-2} = \sqrt{x-1}$$

6. Approfondissement

 **Exercice 17** (Parité, imparité) : Que dire de la parité des fonctions suivantes?

1. $a(x) = \ln\left(\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right)$

2. $f(x) = \frac{x^2}{\exp(x) - \exp(-x)}$

3. $g(x) = \frac{x}{2} - \ln(\exp(x) + 1)$

1. $a(x) = \ln\left(\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right)$

La fonction a admet pour ensemble de définition $\mathcal{D}_a = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ qui est centré en 0. De plus, pour $x \in \mathcal{D}_a$ on a

$$a(-x) = \ln\left(\left|\frac{-x+1}{-x-1}\right|\right) = -\ln\left(\left|\frac{-x-1}{-x+1}\right|\right) \text{ car } \ln(1/b) = -\ln(b).$$

$a(-x) = -\ln\left(\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right) = -a(x)$. On a multiplié par -1 numérateur et dénominateur de la fraction.

Donc la fonction a est impaire.

2. $f(x) = \frac{x^2}{\exp(x) - \exp(-x)}$

On détermine que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ qui est centré en 0. De plus pour $x \in \mathcal{D}_f$ on a

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{e^{-x} - e^{-(-x)}} = \frac{x^2}{e^{-x} - e^x} = -\frac{x^2}{e^x - e^{-x}} = -f(x)$$

Donc la fonction f est impaire.

3. $g(x) = \frac{x}{2} - \ln(\exp(x) + 1)$

On détermine que $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$ qui est centré en 0. De plus pour $x \in \mathcal{D}_g$ on a

$$g(-x) = -\frac{x}{2} - \ln(e^{-x} + 1) = -\frac{x}{2} - \ln(e^{-x}(1 + e^x)) = -\frac{x}{2} - \ln(e^{-x}) - \ln(1 + e^x) = -\frac{x}{2} + x - \ln(1 + e^x) = \frac{x}{2} - \ln(1 + e^x) = g(x)$$

Donc g est une fonction paire.

☀ **Exercice 18** (Un peu de symétrie) :

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto -x + \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ admet une représentation graphique symétrique par rapport à l'origine.
2. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \frac{x^4 - x^2 - 2}{x^8 - x^6 + 1}$ admet une courbe représentative symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. ☀

1. On remarque que l'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ qui est centré en 0.

Remarquons que $\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = \ln|1+x| - \ln|1-x|$.

On a donc pour $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f(-x) = x + \ln|1-x| - \ln|1+x| = -f(x).$$

La fonction f est impaire, donc elle admet une représentation graphique symétrique par rapport à l'origine.

2. On ne peut pas déterminer ici l'ensemble de définition de la fonction g , cela nécessiterait de résoudre une équation de degré 8. On peut penser à un changement de variable $X = x^2$, mais l'équation en X serait de degré 4.

Une autre idée serait de déterminer son signe en partant de l'écriture $x^8 - x^6 + 1 = x^6(x^2 - 1) + 1$. C'est fastidieux mais on peut s'en sortir... Ici on va plutôt prouver que l'ensemble de définition est centré en 0 sans le déterminer explicitement. On utilise pour cela $(-x)^8 = x^8$ et $(-x)^6 = x^6$ (puissances paires, les signes s'annulent)

Remarquons que $x \in \mathcal{D}_g \Leftrightarrow x^8 - x^6 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow (-x)^8 - (-x)^6 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow (-x) \in \mathcal{D}_g$.

Donc $\mathcal{D}_g$ est centré en 0. De plus il est non vide (par exemple $0 \in \mathcal{D}_g$.) Si $\mathcal{D}_g$ était vide, la suite de cette question n'aurait pas de sens, puisqu'on ne peut pas choisir un $x \in \mathcal{D}_g$.

Soit $x \in \mathcal{D}_g$. On a alors

$$g(-x) = \frac{(-x)^4 - (-x)^2 - 2}{(-x)^8 - (-x)^6 + 1} = \frac{x^4 - x^2 - 2}{x^8 - x^6 + 1} = g(x).$$

La fonction g est paire. Donc elle admet une représentation graphique symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

☀ **Exercice 19** (Décomposition paire + impaire) :

1. Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et impaire.
2. Montrer que cette décomposition est unique.

Analyse du problème. Avant de pouvoir rédiger, on commence par analyser le problème au brouillon. Supposons que $f = p + i$ avec p paire et i impaire.

On utilise les définitions des fonctions paires et impaires :

$p(-x) = p(x)$ et $i(-x) = -i(x)$. On en déduit :

$$f(x) = p(x) + i(x)$$

$$f(-x) = p(x) - i(x)$$

En sommant ces deux égalités on obtient $p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$

Et en soustrayant on obtient $i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$

On a donc obtenu une définition de p et i , il reste à vérifier qu'elles sont bien paires et impaire, puis à rédiger.

1.

2.

7. Type DS ou concours

 **Exercice 20** (D'après HEC) : Soit $a \geq 0$. On note P_a la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $P_a(x) = x^3 + ax - 1$ et on admet que l'équation $P_a(x) = 0$ admet une unique solution réelle. On la note $u(a)$ et on considère alors la fonction u définie sur $\mathbb{R}_+$ qui à tout réel positif a associe $u(a)$.

1. En comparant $P_a(u(a))$ et $P_a(0)$, montrer que $\forall a \geq 0, u(a) > 0$.
2. (a) Montrer que, pour tous réels positifs a et b , $P_a(u(b)) = (a - b)u(b)$.
(b) En déduire le sens de variation de la fonction u .

 **Exercice 21** (D'après HEC) : Soit $a \geq 0$. On note P_a la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $P_a(x) = x^3 + ax - 1$ et on admet que l'équation $P_a(x) = 0$ admet une unique solution réelle. On la note $u(a)$ et on considère alors la fonction u définie sur $\mathbb{R}_+$ qui à tout réel positif a associe $u(a)$.

1. En comparant $P_a(u(a))$ et $P_a(0)$, montrer que $\forall a \geq 0, u(a) > 0$.
2. (a) Montrer que, pour tous réels positifs a et b , $P_a(u(b)) = (a - b)u(b)$.
(b) En déduire le sens de variation de la fonction u .

1. Soit $a \geq 0$.

On montre que la fonction P_a est strictement croissante car

$$P'_a(x) = 3x^2 + a > 0.$$

D'autre part, par définition de $u(a)$, on a, $P_a(u(a)) = 0$. De plus, $P_a(0) = -1$.

On a donc $P_a(u(a)) > P_a(0)$.

Par croissance de P_a , on en déduit que $\boxed{u(a) > 0}$.

2. (a) Pour tous réels positifs a et b on a

$$\begin{aligned} P_a(u(b)) &= (u(b))^3 + au(b) + 1 \\ &= (u(b))^3 + bu(b) + 1 + au(b) - bu(b) \\ &= P_b(u(b)) + (a - b)u(b) \\ &= (a - b)u(b) \end{aligned}$$

On obtient donc $\boxed{P_a(u(b)) = (a - b)u(b)}$.

- (b) Soient a et b des réels strictement positifs tels que $a < b$.

On a alors $P_a(u(b)) = (a - b)u(b) \leq 0$, car $a - b \leq 0$ et $u(b) \geq 0$ d'après la première question.

Or $P_a(u(a)) = 0$, ce qui donne $P_a(u(b)) \leq P_a(u(a))$.

Par croissance de la fonction P_a , on en déduit que $u(b) \leq u(a)$.

On a donc prouvé que $\boxed{\text{la fonction } u \text{ est décroissante.}}$

☀ **Exercice 22** (d'après ESCP) : Soit f la fonction définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = x - \ln(x)$.

- Déterminer l'expression $f'(x)$ pour tout x strictement positif.
- Donner le tableau de variation de la fonction f .
- En déduire que $\forall x > 0, f(x) > 0$.
- Déterminer l'expression $f''(x)$ pour tout x strictement positif.
- En déduire les variations de f' .
- Établir pour tout x dans $[1, 2]$ les inégalités suivantes, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

☀ **Exercice 23** (d'après ESCP) : Soit f la fonction définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = x - \ln(x)$.

- Déterminer l'expression $f'(x)$ pour tout x strictement positif.
- Donner le tableau de variation de la fonction f .
- En déduire que $\forall x > 0, f(x) > 0$.
- Déterminer l'expression $f''(x)$ pour tout x strictement positif.
- En déduire les variations de f' .
- Établir pour tout x dans $[1, 2]$ les inégalités suivantes, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Où la seconde équivalence est donnée en multipliant par x qui est strictement positif.

On en déduit le tableau de variations de f .

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		1	

3. Les variations de f nous indiquent que cette fonction admet un minimum pour $x = 1$.
On a $f(1) = 1 - \ln(1) = 1$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $f(x) \geq f(1)$. Par conséquent,

$$f(x) > 0 \text{ pour tout } x > 0.$$

4. Pour tout $x > 0$ on a $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, donc $f''(x) = \frac{1}{x^2}$.

5. La fonction f' admet pour dérivée f'' qui est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc la fonction f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

6. On a d'une part $f'(1) = 1 - \frac{1}{1} = 0$
et d'autre part, $f'(2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Par croissance de f' on a

$$\begin{aligned} x \in [1; 2] &\Rightarrow 1 \leq x \leq 2 \\ &\Rightarrow f'(1) \leq f'(x) \leq f'(2) \\ &\Rightarrow 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$