
CHAPITRE 4

SOMMES ET PRODUITS

1. Somme de nombres réels	2
1.1 Définitions et notations	2
1.2 Sommes usuelles	3
1.3 Méthodes pour se ramener à une somme usuelle	4
1.4 Autre méthodes	6
2. Produit de nombres réels	8
2.1 Définitions et notations	8
2.2 Un cas particulier : factorielle	8
2.3 Règles de calcul	9
3. Compléments	10
3.1 Une convention	10
3.2 Passage de somme à produit et réciproquement	10
3.3 Sommes et produits d'inégalités	11
TD	13
1. Sommes	13
2. Produits	13
3. En autonomie	14
4. Approfondissement	15
5. Type DS ou concours	16
Bilan	17
1. Méthodes à retenir	17
2. Erreurs classiques à éviter	17

Dans tout le chapitre, on utilise les notations x_k et y_k pour désigner des nombres réels..

1. Somme de nombres réels

1.1 Définitions et notations

Définition 1 (Notation Σ)

✓ Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$. On note la somme finie des éléments $x_p, x_{p+1}, \dots, x_n$:

$$\sum_{k=p}^n x_k = x_p + x_{p+1} + \dots + x_n.$$

✓ k s'appelle l'**indice de la somme** ou **de sommation** et p et n sont les **bornes de la somme**.

Exemple 2 (Calculer) :

1. $\sum_{k=3}^6 (2k)$
2. $\sum_{k=2}^4 k^2$

Exemple 3 (Écrire avec le symbole somme) :

1. $1 + 2 + \dots + n = \dots$
2. $6 + 9 + 12 + 15 + 18 = \dots$
3. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \dots$
4. $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \dots$
5. $\frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+2} + \dots + \frac{1}{1+n} = \dots$
6. $e^2 + e^3 + \dots + e^{15} = \dots$

Remarque 4 :

1. Bornes de la somme

✓ Les bornes de la somme doivent être des entiers : on ne peut pas écrire $\sum_{k=1}^{2,5} k$

✓ La borne du dessus doit être supérieure ou égale à la borne du dessous sinon la somme est considérée comme nulle par convention : $\sum_{k=3}^1 k^2 =$

2. Indice de sommation

✓ L'indice d'une somme est **muet**, ce qui signifie que la lettre utilisée pour la sommation n'a aucune importance. On peut aussi bien utiliser les lettres i, j, k , etc.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{j=1}^n x_j \dots$$

✓ Différentes notations. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$, on note :

$$\sum_{k=p}^n x_k = \sum_{p \leq k \leq n} x_k = \sum_{k \in \llbracket p, n \rrbracket} x_k = x_p + x_{p+1} + \dots + x_n.$$

✓ L'indice de sommation ne peut pas être présent dans les bornes de la somme. On ne peut pas écrire $\sum_{i=1}^i 2i$.

✓ L'indice de sommation ne peut pas être présent hors de la somme. On ne peut pas écrire $k \sum_{k=1}^n 2k^2$.

3. Nombre de termes d'une somme

Si $p \leq n$, alors la somme $\sum_{k=p}^n x_k$ comportetermes

1.2 Sommes usuelles

Proposition 5 (Somme d'une constante)

Soient $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$ et $a \in \mathbb{R}$. On a $\sum_{k=p}^n a =$

Exemple 6 : On a $\sum_{k=0}^n 3 =$, $\sum_{k=1}^n 3 =$ et $\sum_{k=2}^n 3 =$

Proposition 7 (Somme des k et des k^2)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

1. $\sum_{k=0}^n k = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\forall p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$, on a $\sum_{k=p}^n k = (n-p+1) \frac{p+n}{2}$
2. $\sum_{k=0}^n k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Démonstration. Ces résultats seront démontrés au chapitre 5. □

Exemple 8 : Calculer les sommes suivantes pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\sum_{k=1}^{n-1} k$
2. $\sum_{k=0}^n (2k+1)$
3. $\sum_{k=1}^n (3k^2 - k + 2)$
4. $\sum_{k=1}^n (n - k + 1)$

Proposition 9 (Somme des termes d'une suite géométrique)

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{R},$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

Plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$, si $q \neq 1$, alors

$$\sum_{k=p}^n q^k = q^p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$$

Démonstration.

□

Exemple 10 : Calculer les sommes suivantes.

1. $\sum_{i=0}^n 3^{-i}$
2. $\sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$
3. $\sum_{k=0}^n \frac{2^k}{3^{k+1}}$

1.3 Méthodes pour se ramener à une somme usuelle

Proposition 11 (Relation de Chasles)

Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $m+1 \leq n$, on a :

$$\sum_{k=0}^n x_k = \sum_{k=0}^m x_k + \sum_{k=m+1}^n x_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=m+1}^n x_k = \sum_{k=0}^n x_k - \sum_{k=0}^m x_k$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n+1} x_k = \left(\sum_{k=0}^n x_k \right) + x_{n+1}.$$

Exemple 12 :

1. Soit $n \dots$ Alors $\sum_{k=2}^n (k-1)^2$
2. Soit $n \dots$ Alors $\sum_{k=1}^{n+1} 3k =$
3. Soit $n \dots$ Alors, $\sum_{i=4}^n i^2 =$

Proposition 13 (Linéarité de la somme)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^n (x_k + y_k) = \sum_{k=0}^n x_k + \sum_{k=0}^n y_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n (\lambda x_k) = \lambda \sum_{k=0}^n x_k$$

Exemple 14 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\sum_{k=1}^n (3k + 7^k) =$

Proposition 15 (Changement d'indice 1 : translation d'indice)

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$ et soit $m \in \mathbb{Z}$. On a

$$\sum_{k=p}^n x_{k+m} = \sum_{i=p+m}^{n+m} x_i.$$

On dit qu'on a effectué le **changement d'indice** $i = k + m$. On dit aussi parfois qu'on fait une translation d'indice.

Exemple 16 : Calculer à l'aide d'un changement d'indice la somme $\sum_{k=5}^n k^2$.

Exercice 17 : Effectuer un changement d'indice utile pour les sommes suivantes.

1. $\sum_{k=0}^{10} \sqrt{k+2} =$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n (k+6) =$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=2}^{n+1} (k^2 - 2k + 1) =$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n}^{2n} (k-n)(k-2n) =$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^{2n+1} \frac{e^{j-1}}{j^2} =$

Proposition 18 (Changement d'indice 2 : retournement de somme)

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$ et soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq n$. On a

$$\sum_{k=p}^n x_{m-k} = \sum_{i=m-n}^{m-p} x_i.$$

On dit qu'on a effectué le **changement d'indice** $i = m - k$. On dit parfois qu'on retourne la somme.

Exemple 19 : Effectuer un changement d'indice utile pour les sommes suivantes.

1. $\sum_{k=2}^{12} (13 - k)^2 =$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n (k+1)\sqrt{n-k} =$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right) =$

Remarque 20 :

- ✓ On utilisera uniquement les changements d'indice de la forme $i = k + m$ ou $i = m - k$.
- ✓ Les changements de variables du genre $i = 2k$ ou $i = 3k$ ne sont pas valables.

Par exemple, comparer les sommes $\sum_{k=1}^3 2k$ et $\sum_{i=2}^6 i$:

1.4 Autre méthodes

Proposition 21 (Somme télescopique)

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$,

$$\sum_{k=p}^n (x_{k+1} - x_k) =$$

Idée de preuve.

□

Remarque 22 : Ce n'est pas une formule à apprendre par cœur : il faut en retenir le principe et savoir l'adapter en pratique.

Exercice 23 :

1. Pour tout $n \geq 5$, calculer $\sum_{k=5}^n (x_k - x_{k-1})$.

2. Pour tout $n \geq 2$, calculer $\sum_{k=2}^n (x_k - x_{k+1})$.

3. (a) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

4. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, écrire $2k+1$ comme une différence de carrés d'entiers consécutifs.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire $\sum_{k=0}^n (2k+1)$.

Proposition 24 (Inégalité triangulaire)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \sum_{k=0}^n x_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |x_k|$$

Exemple 25 : On a : $\left| \sum_{k=0}^7 (3k-2) \right| \leq \sum_{k=0}^7 |3k-2|$

2. Produit de nombres réels

2.1 Définitions et notations

Définition 26

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$. On note le produit fini des éléments $x_p, \dots, x_n$:

$$\prod_{k=p}^n x_k = x_p \times x_{p+1} \times \cdots \times x_{n-1} \times x_n.$$

Remarque 27 :

✓ L'indice k est muet dans le produit tout comme pour la somme.

✓ On note aussi $\prod_{k=p}^n x_k = \prod_{p \leq k \leq n} x_k = \prod_{k \in \llbracket p, n \rrbracket} x_k$.

Exemple 28 : Calculer les produits suivants :

1. $\prod_{k=0}^{10} 2 =$

2. $\prod_{k=0}^{1000} (k-500) \ln(1 + |k-500|) =$

2.2 Un cas particulier : factorielle

Définition 29 (Factorielle d'un entier)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle **factorielle de n** , notée $n!$, l'entier naturel défini par

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Exemple 30 : $0! = \dots, 2! = \dots, 5! = \dots$

Proposition 31 (Lien entre $n!$ et $(n-1)!$)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = n \times (n-1)!.$$

Exercice 32 : Simplifier $\frac{101!}{99!}$, $\frac{n!}{(n-3)!}$, $\frac{(2n)!}{(2n+2)!}$ et $\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$.

2.3 Règles de calcul

Proposition 33 (Produit d'une constante)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \prod_{i=1}^n \lambda = \lambda^n.$$

Proposition 34 (Relation de Chasles)

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $m + 1 \leq n$. On a

$$\prod_{k=1}^n x_k = \left(\prod_{k=1}^m x_k \right) \left(\prod_{k=m+1}^n x_k \right) \quad \text{et} \quad \prod_{k=m+1}^n x_k = \frac{\prod_{k=1}^n x_k}{\prod_{k=1}^m x_k} \quad \text{si les } x_k \text{ sont non nuls}$$

Proposition 35 (Multiplication, division et puissances)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1.

$$\prod_{k=1}^n (x_k y_k) = \left(\prod_{k=1}^n x_k \right) \left(\prod_{k=1}^n y_k \right)$$

2. Si les y_k sont non nuls, alors

$$\prod_{k=1}^n \frac{x_k}{y_k} = \frac{\prod_{k=1}^n x_k}{\prod_{k=1}^n y_k}.$$

3. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ (ou $\mathbb{Z}$ si les x_k sont non nuls),

$$\prod_{k=1}^n x_k^m = \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^m$$

Remarque 36 : Attention, on a $\prod_{k=1}^n (\lambda x_k) = \lambda^n \prod_{k=1}^n x_k$. Il n'y a pas de linéarité du produit.

Proposition 37 (Changement d'indice)

Les deux types de changements d'indice $i = k + m$ et $i = m - k$ que nous avons introduits pour les sommes sont aussi valables pour les produits et ils se font de manière analogue.

Exemple 38 :

$$1. \quad \prod_{k=0}^{10} \sqrt{k+2} =$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\prod_{k=1}^n (n-k)^2 =$

Proposition 39 (Produit télescopique)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si les x_k sont non nuls, alors

$$\prod_{k=1}^n \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{n+1}}{x_1}.$$

Idée de preuve.

□

Exemple 40 :

1. Calculer $\prod_{k=5}^{45} \frac{k}{k+1}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\prod_{i=0}^n \frac{i+2}{i+1}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Calculer $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

3. Compléments

3.1 Une convention

Définition 41

Si $p > n$, on pose $\sum_{k=p}^n x_k = 0$ et $\prod_{k=p}^n x_k = 1$.

3.2 Passage de somme à produit et réciproquement

Remarque 42 : Le $\ln$ transforme les produits en sommes et $\exp$ transforme les sommes en produits. Dans certains cas, il sera utile de calculer le logarithme ou l'exponentielle d'une expression mais il ne faudra pas oublier de revenir à l'expression de départ.

Proposition 43

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$.

1. $\exp\left(\sum_{k=p}^n x_k\right) = \prod_{k=p}^n \exp(x_k)$.
2. Si les x_k sont strictement positifs, alors $\ln\left(\prod_{k=p}^n x_k\right) = \sum_{k=p}^n \ln(x_k)$.

Exemple 44 : Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^n 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$.

Indication : on pourra commencer par calculer le logarithme du produit et ensuite revenir au produit.

3.3 Sommes et produits d'inégalités

Proposition 45

Soient $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux familles de réels et $n \in \mathbb{N}$. Si pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k \leq b_k$, alors

$$\sum_{k=0}^n a_k \leq \sum_{k=0}^n b_k.$$

Proposition 46

Soient $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux familles de réels **positifs** et $n \in \mathbb{N}$. Si pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k \leq b_k$, alors

$$\prod_{k=0}^n a_k \leq \prod_{k=0}^n b_k.$$

Exemple 47 : On admet que pour tout réel x on a $1 + x \leq e^x$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n (1 + k) \leq \sum_{k=1}^n e^k$.

2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n(n+3)}{2} \leq \frac{e^{n+1} - e}{e - 1}$.

Vrai ou faux? Tout dépend du point de vue...

$3! = 5$

$3 \neq 5$

TD

1. Sommes

☀ **Exercice 1** (Sans la somme) : Écrire sans le symbole $\sum$ les expressions suivantes

1. $\sum_{k=1}^5 k^2$

3. $\sum_{k=10}^{15} e^k$

5. $\sum_{j=3}^8 \frac{j^2}{3^j}$

2. $\sum_{i=1}^5 k^2$

4. $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2k+1}$

6. $\sum_{p=3}^5 x(1-x^2)^p$

☀ **Exercice 2** (Avec la somme) : Écrire avec le symbole $\sum$ les expressions suivantes

1. $2^5 + 3^5 + 4^5 + \dots + n^5$

5. $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$

2. $1 - a + a^2 - a^3 + \dots + (-1)^n a^n$

6. $\ln(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n)$

3. $\frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{6} + \dots + \frac{a^n}{2n}$

7. la somme des 10 premiers entiers pairs.

4. $\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{4} + \dots + \frac{2^{2015}}{2016}$

8. la somme des entiers impairs inférieurs à 20.

☀ **Exercice 3** : Calculer les sommes suivantes, en précisant pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ elles sont valables.

1. $\sum_{k=1}^{100} (2k)$

2. $\sum_{k=0}^{2n} (k^2 - 3k + 1)$

4. $\sum_{k=10}^n (2^k)$

3. $\sum_{k=1}^n k(k+1)$

5. $\sum_{k=2}^n (3 + 4k + 5^k)$

☀ **Exercice 4** : Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^n (2k+3)$

4. $\sum_{k=0}^n (-1)^{2k} e^{kn}$

7. $\sum_{k=0}^n (n-k)^2$

2. $\sum_{k=0}^n (5^k - 3^{4k})$

5. $\sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k 3^n$

8. $\sum_{k=0}^{n-1} (n-k+1)^2$ avec $n \geq 1$

3. $\sum_{k=0}^n (-1)^k 2^{n-k}$

6. $\sum_{k=5}^n (k-5)^2$ avec $n \geq 5$

☀ **Exercice 5** (Changement d'indice) : Effectuer le changement d'indice approprié pour **simplifier** l'écriture de la somme (on ne demande pas de calculer la somme).

1. $\sum_{i=4}^{10} (i-4)^4$

2. $\sum_{k=5}^n \frac{k-2}{e^{k-2}}$

3. $\sum_{j=1}^n 3^{n-j}$

4. $\sum_{k=2}^{2n} \frac{2^{3k-3}}{3k-3}$

☀ **Exercice 6** : On pose $S = \sum_{k=0}^{90} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$.

2. En déduire une autre écriture de S et calculer la valeur exacte de S .

2. Produits

☀ **Exercice 7 :** Calculer :

1. $A = \frac{10!}{6!}$

2. $B = \frac{2499!}{2498!}$

3. $C = \frac{5!}{2! \times 3!}$

☀ **Exercice 8 :** Simplifier, en précisant pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ ces expressions sont valables.

1. $A = \frac{(n+1)!}{n!}$

3. $C = (n+1) \times n!$

5. $E = \frac{(3n-1)!}{(3n+2)!}$

2. $B = n! + (n+1)! - (n+2)!$

4. $D = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

☀ **Exercice 9 :** Calculer (ou prouver le résultat donné)

1. $\prod_{k=1}^n k^2$

4. $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

7. $\prod_{k=1}^n e^{k^2}$

2. $\prod_{k=1}^n 2k$

5. $\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$

8. $\prod_{k=1}^n \ln(k)$

3. $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$

6. $\prod_{k=2}^n \frac{k^2 - 1}{k} = \frac{(n+1)!}{2n}$

☀ **Exercice 10 :** Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer en fonction de a le produit : $\prod_{k=1}^n e^{-a^k}$.

3. En autonomie

☀ **Exercice 11** (Comprendre le symbole somme) : Passer chaque expression sans somme à une expression avec somme, et inversement.

1. $\sum_{k=1}^6 (2k+1)$

3. $5+6+7+8+9+10+11+12$

2. $\sum_{j=0}^4 (j^2 - 4)$

4. $\frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^6} + \dots + \frac{1}{3^9}$

☀ **Exercice 12** (Calculs de sommes) : Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^n k(-6k+1)$

3. $\sum_{k=1}^n e^{3k+1}$

5. $\sum_{k=3}^n (k+2)^2$

2. $\sum_{k=0}^n \frac{7^k}{3^{2k}}$

4. $\sum_{k=0}^{2n} 3^{n+k}$

☀ **Exercice 13** (Changement d'indice) : Effectuer le changement d'indice indiqué puis calculer la somme.

1. $\sum_{k=2}^{n+2} (k-2)^2$ avec $j = k-2$

2. $\sum_{k=5}^n (k^2 - 10k + 25)$ avec $j = k-5$

3. $\sum_{k=0}^n 2^{n-k}$ avec $j = n-k$

☀ **Exercice 14** (Somme télescopique) :

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $(k+1)^3 - k^3$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire $\sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1)$.

  **Exercice 15** (Somme télescopique) : Justifier que pour $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \ln(k) - \ln(k+1)$, puis calculer $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

  **Exercice 16** (Factorielles) : Simplifier les expressions suivantes, où n désigne un entier dont on précisera les valeurs possibles.

- | | | | |
|------------------------------------|---------------------------|--------------------------------------|------------------------------|
| 1. $\frac{2025!}{2024!}$ | 3. $\frac{103!}{99!}$ | 5. $\frac{n!}{(n-2)!}$ | 7. $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$ |
| 2. $2024! + 2025!$
(factoriser) | 4. $\frac{(n+1)!}{(n+1)}$ | 6. $\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}$ | |

  **Exercice 17** (Produits) : Calculer (ou prouver le résultat donné)

- | | | |
|--------------------------------------|-----------------------------------|------------------------|
| 1. $\prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k-1}$ | 2. $\prod_{k=2}^n \frac{2k}{k+1}$ | 3. $\prod_{k=1}^n e^k$ |
|--------------------------------------|-----------------------------------|------------------------|

4. Approfondissement

 **Exercice 18** : On cherche à calculer $S = \sum_{k=2}^n \frac{k-5}{k(k^2-1)}$ pour un entier $n \geq 2$.

- Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{-2}{k-1} + \frac{5}{k} + \frac{-3}{k+1}$.
- En déduire la valeur de S grâce à une propriété de télescopage.

 **Exercice 19** : Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k k!$

 **Exercice 20** : On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{n^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

- Calculer S_1 , S_2 et S_3 .
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner une expression $S_{n+1} - S_n$.
On pourra commencer par déterminer la valeur de $\lfloor \sqrt{k} \rfloor$ quand $n^2 \leq k < (n+1)^2$.
- En déduire pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de S_n .

 **Exercice 21** :

- Montrer que pour tout réel $x > -1$ on a $\ln(1+x) \leq x$
 - Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier que $\ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$.
 - Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$.
 - En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq 2$.
- Montrer que $\forall n \geq 2$, $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.
 - On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq S_n \leq 2$.

5. Type DS ou concours

☛ Exercice 22 (Fonction, somme et produits) :

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{\ln(j)}{n^2}\right)$.

1. (a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$.
 (b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer, à l'aide d'un changement d'indice, $\sum_{j=1}^n (j-1)^2$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $[0, n+1]$ par :

$$\forall x \in [0, n+1], \quad f(x) = x(n+1-x).$$

- (b) En déduire que $\forall x \in [0, n+1], 0 \leq x(n+1-x) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$.

- (c) Montrer que $\prod_{k=1}^n (k(n+1-k)) = (n!)^r$ avec r un entier à déterminer.

- (d) À l'aide de ce qui précède, montrer que $0 \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

- (e) Montrer que $\frac{n+1}{2} \leq n$.

- (f) En déduire que $0 \leq \frac{\ln(n!)}{n^2} \leq \frac{\ln(n)}{n}$.

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln(u_n)$.

- (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer v_n sous la forme d'une somme.

- (b) À l'aide de la question 1., montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad \frac{\ln(j)}{n^2} - \frac{(\ln(j))^2}{2n^4} \leq \ln\left(1 + \frac{\ln(j)}{n^2}\right) \leq \frac{\ln(j)}{n^2}.$$

- (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\ln(n!)}{n^2} - \frac{1}{2n^4} \sum_{j=1}^n (\ln(j))^2 \leq v_n \leq \frac{\ln(n!)}{n^2}.$$

- (d) À l'aide de la question 1., montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \frac{1}{2n^4} \sum_{j=1}^n (\ln(j))^2 \leq \frac{1}{2n^4} \sum_{j=1}^n (j-1)^2.$$

- (e) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\ln(n!)}{n^2} - \frac{(n-1)(2n-1)}{12n^3} \leq v_n \leq \frac{\ln(n)}{n}.$$

Bilan

1. Méthodes à retenir

✓ Connaître les sommes et les produits remarquables

$$\begin{array}{llll} \sum_{k=p}^n a = a(n-p+1) & \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} & \sum_{k=p}^n k = (n-p+1) \frac{p+n}{2} & \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \sum_{k=p}^n q^k = q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \prod_{k=1}^n k = n! & \prod_{k=1}^n \lambda = \lambda^n \end{array}$$

✓ Sortir un coefficient λ d'une somme ou d'un produit

- La somme est linéaire : $\sum_{k=p}^n \lambda x_k = \lambda \sum_{k=p}^n x_k$.
- Le produit n'est pas linéaire : $\prod_{k=p}^n \lambda x_k = \lambda^{n-p+1} \prod_{k=p}^n x_k$.

✓ Savoir effectuer un changement d'indice

Il y en a 2 sortes : le premier est $i = k + m$ (où m peut être positif ou négatif), le deuxième est $i = m - k$ (avec m positif) et c'est tout. Il faut bien savoir calculer les bornes. Le but du changement d'indice est de se ramener à des sommes ou des produits remarquables que vous pourrez calculer.

✓ Utiliser le télescopage

On écrit les premiers termes et les derniers termes et on regarde ce qui s'annule. Il restera toujours le terme d'indice le plus petit et celui d'indice le plus grand mais il ne faut pas se tromper sur le signe. On l'utilise :

- quand on voit, dans une somme, une différence entre un terme en k et un en $k-1$ ou $k+1$,
- quand on voit, dans un produit, avec un quotient d'un terme en k et un en $k-1$ ou $k+1$.

✓ Faire apparaître ce qui nous arrange et compenser

- Quand la somme est une somme remarquable mais ne commence pas à l'indice que l'on souhaite (0 ou 1 en général), la solution est simple. On ajoute tous les termes en partant de 0 ou 1 et on enlève les premiers que l'on n'avait pas. On utilise la relation de Chasles "à l'envers" et on fait une différence de somme.
- Quand on a un produit et qu'il manque des termes pour arriver à le calculer, on peut multiplier par ces termes et diviser pour compenser (faire attention de ne pas multiplier par des termes nuls.)

✓ Il est aussi nécessaire de bien maîtriser les règles de calculs des puissances

car il faut parfois faire quelques arrangements pour se ramener aux sommes remarquables.

✓ Il est parfois utile de transformer des produits en sommes (et réciproquement) à l'aide du $\ln$ et de l'exponentielle.

✓ Faire des sommes ou des produits d'inégalités

On peut facilement sommer des inégalités. Pour les produits, il ne faut pas oublier de vérifier que les termes à multiplier sont positifs.

2. Erreurs classiques à éviter

✓ Faire attention aux nombres de termes des sommes et produits

Quand on fait une somme ou un produit de 0 à n , il y a $\boxed{n+1}$ termes.

Quand on fait une somme ou un produit de p à n , il y a $\boxed{n-p+1}$ termes.

- ✓ **Faire attention aux premiers indices des sommes ou des produits** Si le premier indice n'est pas celui que vous avez dans les sommes remarquables, il faut les compenser.
- ✓ **L'indice est muet** Si l'indice de la somme ou du produit est k , il ne doit pas rester de k une fois que votre somme ou produit est calculé. Par contre, si vous faites une somme ou un produit jusqu'à n , il restera très souvent du n .

