
CHAPITRE 4

SOMMES ET PRODUITS

1. Sommes	1
2. Produits	5
3. En autonomie	6
4. Approfondissement	9
5. Type DS ou concours	12

1. Sommes

☼ **Exercice 1** (Sans la somme) : Écrire sans le symbole $\sum$ les expressions suivantes

1. $\sum_{k=1}^5 k^2$

3. $\sum_{k=10}^{15} e^k$

5. $\sum_{j=3}^8 \frac{j^2}{3^j}$

2. $\sum_{i=1}^5 k^2$

4. $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2k+1}$

6. $\sum_{p=3}^5 x(1-x^2)^p$

1. $\sum_{k=1}^5 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

2. $\sum_{i=1}^5 k^2 = k^2 + k^2 + k^2 + k^2 + k^2 = 5k^2$

3. $\sum_{k=10}^{15} e^k = e^{10} + e^{11} + e^{12} + e^{13} + e^{14} + e^{15}$

4. $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2k+1} = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{4+1} + \frac{1}{6+1} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$

$$5. \sum_{j=3}^8 \frac{j^2}{3^j} = \frac{3^2}{3^3} + \frac{4^2}{3^4} + \frac{5^2}{3^5} + \frac{6^2}{3^6} + \frac{7^2}{3^7} + \frac{8^2}{3^8}$$

$$6. \sum_{p=3}^5 x(1-x^2)^p = x(1-x^2)^3 + x(1-x^2)^4 + x(1-x^2)^5$$

☀ **Exercice 2** (Avec la somme) : Écrire avec le symbole $\sum$ les expressions suivantes

$$1. 2^5 + 3^5 + 4^5 + \dots + n^5$$

$$2. 1 - a + a^2 - a^3 + \dots + (-1)^n a^n$$

$$3. \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{6} + \dots + \frac{a^n}{2n}$$

$$4. \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{4} + \dots + \frac{2^{2015}}{2016}$$

$$5. \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$$

$$6. \ln(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n)$$

7. la somme des 10 premiers entiers pairs.

8. la somme des entiers impairs inférieurs à 20.

$$1. 2^5 + 3^5 + 4^5 + \dots + n^5 = \sum_{k=2}^n k^5$$

$$2. 1 - a + a^2 - a^3 + \dots + (-1)^n a^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a^k$$

$$3. \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{6} + \dots + \frac{a^n}{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{a^k}{2k}$$

$$4. \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{4} + \dots + \frac{2^{2015}}{2016} = \sum_{k=1}^{2016} \frac{2^{k-1}}{k}$$

$$5. \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{k}{k+1}$$

$$6. \ln(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n) = \ln(1) + \ln(2) + \dots + \ln(n) = \sum_{k=1}^n \ln(k)$$

$$7. \text{ la somme des 10 premiers entiers pairs : } \sum_{k=1}^{10} 2k$$

$$8. \text{ la somme des entiers impairs inférieurs à 20 : } \sum_{k=0}^9 (2k+1)$$

☀ **Exercice 3** : Calculer les sommes suivantes, en précisant pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ elles sont valables.

$$1. \sum_{k=1}^{100} (2k)$$

$$3. \sum_{k=1}^n k(k+1)$$

$$5. \sum_{k=2}^n (3+4k+5^k)$$

$$2. \sum_{k=0}^{2n} (k^2 - 3k + 1)$$

$$4. \sum_{k=10}^n (2^k)$$

On applique à chaque fois la linéarité pour retrouver les sommes usuelles.

$$1. \sum_{k=1}^{100} (2k) = 2 \sum_{k=1}^{100} k = 2 \frac{100 \times 101}{2} = 10100$$

$$2. \text{ Pour } n \in \mathbb{N} \text{ on a } \sum_{k=0}^{2n} (k^2 - 3k + 1) = \sum_{k=0}^{2n} k^2 - 3 \sum_{k=0}^{2n} k + \sum_{k=0}^{2n} 1 = \frac{(2n)(2n+1)(2 \times 2n+1)}{6} - 3 \frac{(2n)(2n+1)}{2} + 2n+1$$

$$3. \text{ Pour } n \in \mathbb{N}^* \text{ on a } \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n (k^2 + k) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$4. \text{ Pour } n \in \mathbb{N}, n \geq 10, \text{ on a } \sum_{k=10}^n (2^k) = 2^{10} \frac{1-2^{n-9}}{1-2} = 2^n - 2^{10}$$

$$5. \text{ Pour } n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \text{ on a } \sum_{k=2}^n (3 + 4k + 5^k) = \sum_{k=2}^n 3 + 4 \sum_{k=2}^n k + \sum_{k=2}^n 5^k = 3(n-1) + 4(n-1) \frac{2+n}{2} + 5^2 \frac{1-5^{n-1}}{1-5}$$

 **Exercice 4 :** Calculer les sommes suivantes :

$$1. \sum_{k=0}^n (2k+3)$$

$$4. \sum_{k=0}^n (-1)^{2k} e^{kn}$$

$$7. \sum_{k=0}^n (n-k)^2$$

$$2. \sum_{k=0}^n (5^k - 3^{4k})$$

$$5. \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k 3^n$$

$$8. \sum_{k=0}^{n-1} (n-k+1)^2 \text{ avec } n \geq 1$$

$$3. \sum_{k=0}^n (-1)^k 2^{n-k}$$

$$6. \sum_{k=5}^n (k-5)^2 \text{ avec } n \geq 5$$

$$1. \sum_{k=0}^n (2k+3) = \sum_{k=0}^n 2k + \sum_{k=0}^n 3 = 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 3 = 2 \frac{n(n+1)}{2} + 3(n+1) = (n+1)(n+3)$$

$$2. \sum_{k=0}^n (5^k - 3^{4k}) = \sum_{k=0}^n 5^k - \sum_{k=0}^n (3^4)^k = \frac{1-5^{n+1}}{1-5} - \frac{1-(3^4)^{n+1}}{1-3^4} = \frac{5^{n+1}-1}{4} - \frac{3^{4n+4}-1}{80}$$

$$3. \sum_{k=0}^n (-1)^k 2^{n-k} = 2^n \sum_{k=0}^n (-1)^k 2^{-k} = 2^n \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k = 2^n \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2^n \frac{1 - (-2)^{-n-1}}{\frac{1}{2}} = \frac{2^{n+1}}{3} (1 - (-2)^{-n-1})$$

$$4. \sum_{k=0}^n (-1)^{2k} e^{kn} = \sum_{k=0}^n (e^n)^k = \frac{1 - (e^n)^{n+1}}{1 - e^n} = \frac{1 - e^{n^2+n}}{1 - e^n}$$

$$5. \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k 3^n = 3^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3^n \frac{1 - (2/3)^{n+1}}{1 - 2/3} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$

$$6. \sum_{k=5}^n (k-5)^2 = \sum_{i=0}^{n-5} i^2 = \frac{(n-5)(n-4)(2(n-5)+1)}{6} = \frac{(n-5)(n-4)(2n-9)}{6}$$

Avec le changement d'indice $i = k - 5$

on peut aussi utiliser la linéarité de la somme après avoir développé $(k-5)^2$, mais les calculs sont bien plus fastidieux!

$$7. \sum_{k=0}^n (n-k)^2 = \sum_{j=0}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Avec le changement d'indice $j = n - k + 1$

$$8. \sum_{k=0}^{n-1} (n-k+1)^2 = \sum_{j=2}^{n+1} j^2 = \sum_{j=1}^{n+1} j^2 - 1 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} - 1 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - 1$$

Avec le changement d'indice $j = n - k$

☀ **Exercice 5** (Changement d'indice) : Effectuer le changement d'indice approprié pour **simplifier** l'écriture de la somme (on ne demande pas de calculer la somme).

$$1. \sum_{i=4}^{10} (i-4)^4$$

$$2. \sum_{k=5}^n \frac{k-2}{e^{k-2}}$$

$$3. \sum_{j=1}^n 3^{n-j}$$

$$4. \sum_{k=2}^{2n} \frac{2^{3k-3}}{3k-3}$$

$$1. \sum_{i=4}^{10} (i-4)^4 = \sum_{j=0}^6 j^4 \text{ avec } j = i - 4.$$

$$2. \sum_{k=5}^n \frac{k-2}{e^{k-2}} = \sum_{j=3}^{n-2} \frac{j}{e^j} \text{ avec } j = k - 2$$

$$3. \sum_{j=1}^n 3^{n-j} = \sum_{k=0}^{n-1} 3^k \text{ avec } k = n - j$$

$$4. \sum_{k=2}^{2n} \frac{2^{3k-3}}{3k-3} = \sum_{j=1}^{2n-1} \frac{2^{3j}}{3j} \text{ avec } j = k - 1 \text{ (on a alors } k = 2n \Rightarrow j = 2n - 1)$$

☀ **Exercice 6** : On pose $S = \sum_{k=0}^{90} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$.

$$1. \text{ Montrer que pour tout } k \in \mathbb{N}, \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}.$$

2. En déduire une autre écriture de S et calculer la valeur exacte de S .

$$1. \text{ On montre que pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ on a } \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \text{ en utilisant l'expression conjuguée.}$$

2. On a donc

$$S = \sum_{k=0}^{90} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sum_{k=0}^{90} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{91} - \sqrt{0} = \sqrt{91}.$$

On a reconnu une somme télescopique avec $u_k = \sqrt{k}$.

2. Produits

☀ **Exercice 7 :** Calculer :

$$1. A = \frac{10!}{6!}$$

$$2. B = \frac{2499!}{2498!}$$

$$3. C = \frac{5!}{2! \times 3!}$$

$$1. A = \frac{10!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

$$2. B = \frac{2499!}{2498!} = 2499$$

$$3. C = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4}{2!} = 5 \times 2 = 10$$

☀ **Exercice 8 :** Simplifier, en précisant pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ ces expressions sont valables.

$$1. A = \frac{(n+1)!}{n!}$$

$$3. C = (n+1) \times n!$$

$$5. E = \frac{(3n-1)!}{(3n+2)!}$$

$$2. B = n! + (n+1)! - (n+2)!$$

$$4. D = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$1. \text{ Pour } n \in \mathbb{N} \text{ on a } A = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$$

$$2. \text{ Pour } n \in \mathbb{N} \text{ on a } B = n! + (n+1)! - (n+2)! = n!(1 + (n+1) - (n+2)(n+1)) = -n!n(n+2)$$

$$3. \text{ Pour } n \in \mathbb{N} \text{ on a } C = (n+1) \times n! = (n+1)!$$

$$4. \text{ Pour } n \in \mathbb{N} \text{ on a } D = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$$

$$5. \text{ Pour } n \in \mathbb{N}^* \text{ on a } E = \frac{(3n-1)!}{(3n+2)!} = \frac{1}{(3n+2)(3n+1)(3n)}$$

☀ **Exercice 9 :** Calculer (ou prouver le résultat donné)

$$1. \prod_{k=1}^n k^2$$

$$4. \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

$$7. \prod_{k=1}^n e^{k^2}$$

$$2. \prod_{k=1}^n 2k$$

$$5. \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$8. \prod_{k=1}^n \ln(k)$$

$$3. \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

$$6. \prod_{k=2}^n \frac{k^2 - 1}{k} = \frac{(n+1)!}{2n}$$

$$1. \prod_{k=1}^n k^2 = \left(\prod_{k=1}^n k\right) \left(\prod_{k=1}^n k\right) = n! \times n! = (n!)^2$$

$$2. \prod_{k=1}^n 2k = 2^n \prod_{k=1}^n k = 2^n n!$$

$$3. \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^n \left(\frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{n} \text{ par produit télescopique.}$$

$$4. \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{(k+1)(k-1)}{k \times k} = \prod_{k=2}^n \frac{(k+1)}{k} \frac{k-1}{k} = \prod_{k=2}^n \frac{(k+1)}{k} \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} = \frac{n+1}{2} \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

$$5. \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (2k)}{\prod_{k=1}^{n-1} (2k)} = \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$6. \prod_{k=2}^n \frac{k^2-1}{k} = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} \prod_{k=2}^n k = \frac{n+1}{2n} n! = \frac{(n+1)!}{2n}$$

En utilisant le résultat du calcul 5.

$$7. \ln \left(\prod_{k=1}^n e^{k^2} \right) = \sum_{k=1}^n \ln(e^{k^2}) = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\text{Donc } \prod_{k=1}^n e^{k^2} = e^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$8. \prod_{k=1}^n \ln(k) = 0 \text{ car l'un des facteurs est } \ln(1) = 0.$$

Ici le passage par le $\ln$ n'aboutit pas car on trouve une somme des $\ln(\ln(k))$ pour laquelle on n'a pas de formule de calcul.

☀ **Exercice 10 :** Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer en fonction de a le produit : $\prod_{k=1}^n e^{-a^k}$.

On note $P = \prod_{k=1}^n e^{-a^k}$. On a alors

$$S = \ln(P) = \ln \left(\prod_{k=1}^n e^{-a^k} \right) = \sum_{k=1}^n (-a^k) = - \sum_{k=1}^n a^k$$

On distingue deux cas.

Cas 1. $a = 1$. Alors $a^k = 1$ pour tout entier k . On a donc $S = -n \times 1 = -n$

On en déduit $P = e^{-n}$.

Cas 2. $a \neq 1$. On a alors

$$S = -a \frac{1-a^n}{1-a}$$

On en déduit $P = e^{-\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}$.

3. En autonomie

🏠 ☀ **Exercice 11** (Comprendre le symbole somme) : Passer chaque expression sans somme à une expression avec somme, et inversement.

$$1. \sum_{k=1}^6 (2k+1)$$

$$2. \sum_{j=0}^4 (j^2 - 4)$$

$$3. 5+6+7+8+9+10+11+12$$

$$4. \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^6} + \dots + \frac{1}{3^9}$$

1. $\sum_{k=1}^6 (2k+1) = (2+1) + (4+1) + (6+1) + (8+1) + (10+1) + (12+1)$
2. $\sum_{j=0}^4 (j^2 - 4) = (0-4) + (1-4) + (4-4) + (9-4) + (16-4)$
3. $5+6+7+8+9+10+11+12 = \sum_{k=5}^{12} k$
4. $\frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^6} + \cdots + \frac{1}{3^9} = \sum_{k=4}^9 \frac{1}{3^k}$

  **Exercice 12** (Calculs de sommes) : Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^n k(-6k+1)$
2. $\sum_{k=0}^n \frac{7^k}{3^{2k}}$
3. $\sum_{k=1}^n e^{3k+1}$
4. $\sum_{k=0}^{2n} 3^{n+k}$
5. $\sum_{k=3}^n (k+2)^2$

1. $\sum_{k=0}^n k(-6k+1) = -6 \sum_{k=0}^n k^2 + \sum_{k=0}^n k = -6 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}(-4n-1)$
2. $\sum_{k=0}^n \frac{7^k}{3^{2k}} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{7}{3^2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{7}{9}}$
3. $\sum_{k=1}^n e^{3k+1} = e \sum_{k=1}^n (e^3)^k = e \left(\sum_{k=0}^n (e^3)^k - 1 \right) = e \left(\frac{1 - (e^3)^{n+1}}{1 - e^3} - 1 \right)$
4. $\sum_{k=0}^{2n} 3^{n+k} = 3^n \sum_{k=0}^{2n} 3^k = 3^n \frac{1 - 3^{2n+1}}{1 - 3} = -\frac{3^n}{2} (1 - 3^{2n+1})$
5. $\sum_{k=3}^n (k+2)^2 = \sum_{i=5}^{n+2} i^2 = \sum_{i=0}^{n+2} i^2 - \sum_{i=0}^4 i^2 = \frac{(n+2)(n+3)(2(n+2)+1)}{6} - \frac{4 \times 5 \times (2 \times 4 + 1)}{6} = \frac{(n+2)(n+3)(2n+5) - 180}{6}$

Avec le changement de variable $i = k + 2$ puis en appliquant la relation de Chasles.

  **Exercice 13** (Changement d'indice) : Effectuer le changement d'indice indiqué puis calculer la somme.

1. $\sum_{k=2}^{n+2} (k-2)^2$ avec $j = k-2$
2. $\sum_{k=5}^n (k^2 - 10k + 25)$ avec $j = k-5$
3. $\sum_{k=0}^n 2^{n-k}$ avec $j = n-k$

1. On pose $j = k - 2$. Alors $k = 2 \implies j = 0$ et $k = n + 2$

Longrightarrow $j = n$. On obtient donc

$$\sum_{k=2}^{n+2} (k-2)^2 = \sum_{j=0}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. On pose $j = k - 5$. Alors $k = 5 \implies j = 0$ et $k = n$

Longrightarrow $j = n - 5$. De plus $k = j + 5$. On obtient donc

$$\sum_{k=5}^n (k^2 - 10k + 25) = \sum_{j=0}^{n-5} ((j+5)^2 - 10(j+5) + 25) = \sum_{j=0}^{n-5} (j^2 + 10j + 25 - 10j - 50 + 25) = \sum_{j=0}^{n-5} j^2 = \frac{(n-5)(n-5+1)(2(n-5)+1)}{6} = \frac{(n-5)(n-4)(2n-9)}{6}$$

3. On pose $j = n - k$. Alors $k = 0 \implies j = n$ et $k = n$

Longrightarrow $j = 0$. On obtient donc

$$\sum_{k=0}^n 2^{n-k} = \sum_{j=0}^n 2^j = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \frac{1-2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1$$

🏠 ☀ Exercice 14 (Somme télescopique) :

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $(k+1)^3 - k^3$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire $\sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1)$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. On trouve $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc

$$\sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1) = \sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3) = (n+1)^3 - 1^3 = (n+1)^3 - 1.$$

Où on a utilisé une somme télescopique avec $u_k = k^3$.

🏠 ☀ Exercice 15 (Somme télescopique) : Justifier que pour $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \ln(k) - \ln(k+1)$,

puis calculer $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

On a pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^n (\ln(k) - \ln(k+1)) = \ln(1) - \ln(n+1) = -\ln(n+1) = \ln\frac{1}{n+1}$$

On a reconnu une somme télescopique avec $u_k = \ln(k)$

🏠 ☀ Exercice 16 (Factorielles) : Simplifier les expressions suivantes, où n désigne un entier dont on précisera les valeurs possibles.

- | | | | |
|------------------------------------|---------------------------|--------------------------------------|------------------------------|
| 1. $\frac{2025!}{2024!}$ | 3. $\frac{103!}{99!}$ | 5. $\frac{n!}{(n-2)!}$ | 7. $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$ |
| 2. $2024! + 2025!$
(factoriser) | 4. $\frac{(n+1)!}{(n+1)}$ | 6. $\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}$ | |

1. $\frac{2025!}{2024!} = \frac{2025 \times 2024!}{2024!} = 2025$
2. $2024! + 2025! = 2024! + 2025 \times 2024! = 2024!(1 + 2025) = 2024! \times 2026$
3. $\frac{103}{99} = \frac{103 \times 102 \times 101 \times 100 \times 99!}{99!} = 103 \times 102 \times 101 \times 100$
4. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\frac{(n+1)!}{(n+1)} = \frac{(n+1)n!}{n+1} = n!$
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ on a $\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$
6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{n!} + \frac{n}{n!} = \frac{1+n}{n!}$
7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)!}{(2n-1)!} = (2n+1)(2n)$

  **Exercice 17** (Produits) : Calculer (ou prouver le résultat donné)

1. $\prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k-1}$
2. $\prod_{k=2}^n \frac{2k}{k+1}$
3. $\prod_{k=1}^n e^k$

1. $\prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k-1} = \frac{2n+1}{1} = 2n+1$
On a reconnu un produit télescopique avec $u_k = 2k-1$. On a alors $u_{k+1} = 2k+1$.
2. $\prod_{k=2}^n \frac{2k}{k+1} = \frac{2^{n+1} \prod_{k=2}^n k}{\prod_{k=2}^n (k+1)} = 2^{n-1} \frac{2 \times 3 \times \dots \times n}{3 \times 4 \times \dots \times (n+1)} = 2^{n-1} \frac{2}{n+1} = \frac{2^n}{n+1}$
3. On passe par le calcul du logarithme népérien.
 $\ln\left(\prod_{k=1}^n e^k\right) = \sum_{k=1}^n \ln(e^k) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
On en déduit en appliquant la fonction exponentielle :
 $\prod_{k=1}^n e^k = e^{\frac{n(n+1)}{2}}.$

4. Approfondissement

 **Exercice 18** : On cherche à calculer $S = \sum_{k=2}^n \frac{k-5}{k(k^2-1)}$ pour un entier $n \geq 2$.

1. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{-2}{k-1} + \frac{5}{k} + \frac{-3}{k+1}$.
2. En déduire la valeur de S grâce à une propriété de télescopage.

1. On trouve pour $k \geq 2$, $\frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{-2}{k-1} + \frac{5}{k} + \frac{-3}{k+1}$ en partant de l'expression de droite puis en réduisant au même dénominateur.

2. On a donc pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=2}^n \frac{k-5}{k(k^2-1)} = \sum_{k=2}^n \left(\frac{-2}{k-1} + \frac{5}{k} + \frac{-3}{k+1} \right) = \sum_{k=2}^n \left(\frac{-2}{k-1} + \frac{2}{k} + \frac{3}{k} + \frac{-3}{k+1} \right) \\ &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{-2}{k-1} + \frac{2}{k} \right) + \sum_{k=2}^n \left(\frac{3}{k} + \frac{-3}{k+1} \right) = \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{2-1} \right) + \left(\frac{-3}{n+1} + \frac{3}{2} \right) = \frac{2}{n} - 2 - \frac{3}{n+1} + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

En utilisant deux sommes télescopiques, avec $u_k = \frac{2}{k-1}$ et $v_k = \frac{3}{k}$.

☀ **Exercice 19 :** Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k k!$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^n k k! = \sum_{k=1}^n (k+1-1)k! = \sum_{k=1}^n ((k+1)k! - k!) = \sum_{k=1}^n ((k+1)! - k!) = (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1$$

On a reconnu une somme télescopique avec $u_k = k!$.

☀ **Exercice 20 :** On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{n^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

1. Calculer S_1 , S_2 et S_3 .
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner une expression $S_{n+1} - S_n$.
On pourra commencer par déterminer la valeur de $\lfloor \sqrt{k} \rfloor$ quand $n^2 \leq k < (n+1)^2$.
3. En déduire pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de S_n .

1. On trouve $S_1 = 0$; $S_2 = 3$ et $S_3 = 13$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $n^2 \leq k < (n+1)^2$. Alors par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$ on a $n \leq \sqrt{k} < n+1$.

On en déduit $\lfloor k \rfloor = n$. On peut donc déterminer :

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=0}^{(n+1)^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor - \sum_{k=0}^{n^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} n = n \times ((n+1)^2 - 1 - n + 1) = \\ &= n(2n+1) = 2n^2 + n \end{aligned}$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc

$$\begin{aligned}
S_n &= S_n - S_1 \text{ car } S_1 = 0 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (S_{k+1} - S_k) \text{ par somme télescopique} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (2k^2 + k) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} 2k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k \\
&= 2 \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} \\
&= \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}
\end{aligned}$$

 Exercice 21 :

1. (a) Montrer que pour tout réel $x > -1$ on a $\ln(1+x) \leq x$
 (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier que $\ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$.
 (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$.
 (d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq 2$.
2. (a) Montrer que $\forall n \geq 2, \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.
 (b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq S_n \leq 2$.

1. (a) (voir démonstration en fin de chapitre 3 : on définit une fonction par $h(x) = \ln(1+x) - x$ et en étudiant ses variations, on montre qu'elle est majorée par 0.)
 (b) Pour tout $x > -1$ on a $\ln(1+x) \leq x$ En particulier pour $k \in \mathbb{N}$, on peut appliquer cette formule à $x = \frac{1}{2^k}$, ce qui donne

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$$

- (c) Par somme d'inégalités, on en déduit que pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$$

- (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On montre que $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

Cette somme étant majoré par 2, en utilisant le résultat de la question précédente on

en déduit que $\sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq 2$.

2. (a) Soit $n \geq 2$. On a $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n^2 - n}$.

Or on a

$$n \geq 0 \Rightarrow n^2 - n \leq n^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2 - n} \geq \frac{1}{n^2} \text{ par décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et sachant que } n^2 - n \geq 0$$

$$\text{On en déduit que } \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

On remarque que S_n est une somme de termes positifs. Donc on a $S_n \geq S_1 = \frac{1}{1^2} = 1$

D'autre part, d'après le résultat précédent, on peut majorer

$$S_n \leq \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) + 1 \text{ On a fait sortir le terme correspondant à } k=1 \text{ de la somme}$$

$$S_n \leq \frac{1}{1} - \frac{1}{n} + 1 \text{ par somme télescopique}$$

$$S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Ainsi, $\boxed{1 \leq S_n \leq 2}$.

5. Type DS ou concours

☀ **Exercice 22** (Fonction, somme et produits) :

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{\ln(j)}{n^2} \right)$.

1. (a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$.

(b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer, à l'aide d'un changement d'indice, $\sum_{j=1}^n (j-1)^2$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $[0, n+1]$ par :

$$\forall x \in [0, n+1], \quad f(x) = x(n+1-x).$$

(b) En déduire que $\forall x \in [0, n+1], 0 \leq x(n+1-x) \leq \left(\frac{n+1}{2} \right)^2$.

(c) Montrer que $\prod_{k=1}^n (k(n+1-k)) = (n!)^r$ avec r un entier à déterminer.

(d) À l'aide de ce qui précède, montrer que $0 \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

(e) Montrer que $\frac{n+1}{2} \leq n$.

(f) En déduire que $0 \leq \frac{\ln(n!)}{n^2} \leq \frac{\ln(n)}{n}$.

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln(u_n)$.

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer v_n sous la forme d'une somme.

(b) À l'aide de la question 1., montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad \frac{\ln(j)}{n^2} - \frac{(\ln(j))^2}{2n^4} \leq \ln\left(1 + \frac{\ln(j)}{n^2}\right) \leq \frac{\ln(j)}{n^2}.$$

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\ln(n!)}{n^2} - \frac{1}{2n^4} \sum_{j=1}^n (\ln(j))^2 \leq v_n \leq \frac{\ln(n!)}{n^2}.$$

(d) À l'aide de la question 1., montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \frac{1}{2n^4} \sum_{j=1}^n (\ln(j))^2 \leq \frac{1}{2n^4} \sum_{j=1}^n (j-1)^2.$$

(e) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\ln(n!)}{n^2} - \frac{(n-1)(2n-1)}{12n^3} \leq v_n \leq \frac{\ln(n)}{n}.$$

1. (a) On montre $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$ en étudiant les variations de la fonction définie par différence des deux membres. Voir chapitre 3.

(b) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+$ on a alors

$$h'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} \leq 0$$

Donc la fonction h est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle est donc majorée par $h(0) = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a donc $h(x) \leq 0$ et par conséquent, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a (avec le changement d'indice $k = j-1$)

$$\sum_{j=1}^n (j-1)^2 = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) On trouve $f'(x) = n+1-2x$ pour $x \in [0; n+1]$. On en déduit le tableau de variations suivant.

x	0	$\frac{n+1}{2}$	$n+1$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$	0

- (b) D'après le tableau de variations ci-dessus, la fonction f admet sur $[0, n+1]$ un maximum égal à $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ et un minimum de 0.

Ainsi, $\forall x \in [0, n+1], 0 \leq x(n+1-x) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$.

- (c) On a

$$\prod_{k=1}^n (k(n+1-k)) = \prod_{k=1}^n k \prod_{k=1}^n (n+1-k) = n!n! = (n!)^2$$

On obtient bien la forme recherchée avec $r = 2$.

Soit on applique un changement de variable pour faire apparaître la définition de $n!$, soit on reconnaît que le deuxième produit énumère tous ses facteurs en ordre décroissant.

- (d) Tous les facteurs étant positifs, on peut appliquer le produit aux inégalités $k(n+1-k) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ obtenues en appliquant le résultat de la question 3.b) à $x = k \in \llbracket 0; n+1 \rrbracket$. On obtient

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n k(n+1-k) &\leq \prod_{k=1}^n \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow (n!)^2 &\leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n} \\ \Rightarrow n! &\leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a $n! \geq 0$ par définition de la factorielle.

On peut donc conclure $0 \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

- (e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} n \geq 1 &\Rightarrow 2n \geq n+1 \text{ en ajoutant } n \\ &\Rightarrow n \geq \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

- (f) On en déduit que $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \leq n^n$.

De plus, on a montré à la question (3d) que $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

On a donc $1 \leq n! \leq n^n$, la minoration par 1 découlant de la définition de $n!$. On en déduit par passage au logarithme népérien que $0 \leq \ln(n!) \leq n \ln(n)$. En divisant par n^2 on obtient $0 \leq \frac{\ln(n!)}{n^2} \leq \frac{\ln(n)}{n}$.

4. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} v_n &= \ln(u_n) \\ &= \ln\left(\prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{\ln(j)}{n^2}\right)\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \ln\left(1 + \frac{\ln(j)}{n^2}\right) \end{aligned}$$

(b) On sait d'après la question 1 que pour $r \in \mathbb{R}_+$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ on a donc, en appliquant cette formule à $x = \frac{\ln(j)}{n^2} \geq 0$:

$$\frac{\ln(j)}{n^2} - \frac{(\ln(j))^2}{2n^4} \leq \ln\left(1 + \frac{\ln(j)}{n^2}\right) \leq \frac{\ln(j)}{n^2}.$$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ par somme d'inégalités, on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\ln(j)}{n^2} - \sum_{j=1}^n \frac{(\ln(j))^2}{2n^4} &\leq \sum_{j=1}^n \ln\left(1 + \frac{\ln(j)}{n^2}\right) \leq \sum_{j=1}^n \frac{\ln(j)}{n^2} \\ \Rightarrow \frac{\ln(n!)}{n^2} - \frac{1}{2n^4} \sum_{j=1}^n (\ln(j))^2 &\leq v_n \leq \frac{\ln(n!)}{n^2} \end{aligned}$$

$$\text{car } \sum_{j=1}^n \ln(j) = \ln\left(\prod_{j=1}^n j\right) = \ln(n!)$$

(d) On applique le résultat de la question 1.a) au nombre $x = \ln(j) \geq 0$, et on obtient $0 \leq \ln(j) \leq j-1$ pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Alors, $0 \leq (\ln(j))^2 \leq (j-1)^2$ par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$.

Par somme d'inégalités on obtient

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{j=1}^n (\ln(j))^2 \leq \sum_{j=1}^n (j-1)^2 \\ \Rightarrow 0 &\leq \frac{1}{2n^4} \sum_{j=1}^n (\ln(j))^2 \leq \frac{1}{2n^4} \sum_{j=1}^n (j-1)^2 \end{aligned}$$

(e) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a par changement d'indice,

$$\sum_{j=1}^n (j-1)^2 = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n^4} \sum_{j=1}^n (\ln(j))^2 &\leq \frac{1}{2n^4} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ \Rightarrow \frac{1}{2n^4} \sum_{j=1}^n (\ln(j))^2 &\leq \frac{(n-1)(2n-1)}{12n^3} \\ \Rightarrow -\frac{1}{2n^4} \sum_{j=1}^n (\ln(j))^2 &\geq -\frac{(n-1)(2n-1)}{12n^3} \end{aligned}$$

Ainsi on a $-\frac{1}{12n^4} \sum_{j=1}^n (\ln(j))^2 \geq -\frac{(n-1)(2n-1)}{12n^3}$. Or par (4c) on a $v_n \geq \frac{\ln(n!)}{n^2} - \frac{1}{12n^4} \sum_{j=1}^n (\ln(j))^2 \geq \frac{\ln(n!)}{n^2} - \frac{(n-1)(2n-1)}{12n^3}$

Par ailleurs, $\frac{\ln(n!)}{n^2} \leq \frac{\ln(n)}{n}$ d'après 3.f). On a donc $v_n \leq \frac{\ln(n)}{n}$ en utilisant à nouveau l'encadrement de la question 4c).

On obtient donc $\boxed{\frac{\ln(n!)}{n^2} - \frac{(n-1)(2n-1)}{12n^3} \leq v_n \leq \frac{\ln(n)}{n}}.$