

Mathématiques appliquées

Calculs de sommes usuelles

vendredi 2 octobre 2026

Sommes classiques

$$0 + 1 + 2 + \dots$$

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Constante et géométrique

$$a + a + a + \dots$$

$$\sum_{k=p}^n a = a(n - p + 1)$$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

Appliquer les formules sur les sommes suivantes

Exercice | 2

a) $\sum_{k=0}^{10} k^2$

b) $\sum_{k=0}^5 2^k$

c) $\sum_{k=0}^{30} 4$

d) $\sum_{k=0}^{100} k$

e) $\sum_{k=0}^{2n} k$

f) $\sum_{j=0}^{n-1} 5^j$

g) $\sum_{k=0}^{n+1} k^2$

h) $\sum_{p=5}^n x$

i) $\sum_{k=0}^{n+2} 3^{-k}$

j) $\sum_{k=0}^n (2k + 3)^2$

cte

cte

Appliquer les formules sur les sommes suivantes

Exercice | 2

$$a) \sum_{k=0}^{10} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{10 \times (10+1) \times 21}{6}$$

$$= \frac{10 \times 11 \times 21}{6}$$

$$b) \sum_{k=0}^5 2^k = \frac{1-q^{n+1} \times (-1)}{1-q \times (-1)} = \frac{1-2^{5+1}}{1-2} = \frac{1-2^6}{-1} = -1+2^6$$

$$\frac{q^{n+1}-1}{q-1} \quad \checkmark$$

$$c) \sum_{k=0}^{30} 4 = 4 \times (n-p+1) = 4 \times (30-0+1) = 4 \times 31$$

Appliquer les formules sur les sommes suivantes

Exercice | 2

$$d) \sum_{k=0}^{100} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{100 \times 101}{2} = 50 \times 101 = 5050$$

$$e) \sum_{k=0}^{2n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n(2n+1)}{2} = \frac{n(2n+1)}{2}$$

$$f) \sum_{j=0}^{n-1} 5^j = \frac{1-9^{n+1}}{1-9} = \frac{1-5^{n+1}}{1-5} = \frac{1-5^{n+1} \times (-1)}{-4 \times (-1)} = \frac{-1+5^{n+1}}{4}$$

$$g) \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Appliquer les formules sur les sommes suivantes

Exercice | 2

$$h) \sum_{k=5}^n x = x \times (n - \underline{5} + 1) = x \times (n - 5 + 1)$$

$\textcircled{5} = 5$

$$i) \sum_{k=0}^{n+2} 3^{-k} = \sum_{k=0}^{n+2} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1 - 9^{n+1}}{1 - 9}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+3}}{\frac{2}{3}}$$

$$j) \sum_{k=0}^n (2k+3)^2 = \sum_{k=0}^n (4k^2 + 12k + 9)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 3 + 3^2$$

Propriété

Pour toutes suites (x_k) et (y_k) , et pour toute constante λ :

$$\sum_{k=0}^n (x_k + y_k) = \sum_{k=0}^n x_k + \sum_{k=0}^n y_k$$

$$\sum_{k=0}^n (\lambda x_k) = \lambda \sum_{k=0}^n x_k$$

Attention

λ est une constante : elle ne dépend pas de l'indice k .

$$\sum_{k=0}^n (2k + 3)^2$$

$$\sum_{k=0}^n (2k+3)^2 = \sum_{k=0}^n (4k^2 + 12k + 9)$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n (2k+3)^2 &= \sum_{k=0}^n (4k^2 + 12k + 9) \\
 &= \sum_{k=0}^n 4k^2 + \sum_{k=0}^n 12k + \sum_{k=0}^n 9 \\
 &= 4 \sum_{k=0}^n k^2 + 12 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 9
 \end{aligned}$$

(Handwritten notes: Blue circles around $4k^2$, $12k$, and 9 in the second line. Blue checkmarks under each sum in the third line. Red annotations above the second line: $\sum_{k=0}^n 4k^2$, $\sum_{k=0}^n 12k$, and $\sum_{k=0}^n 9$. The text "somme constante" is written in blue below the third sum.)

$$\sum_{k=0}^n (2k+3)^2 = \sum_{k=0}^n (4k^2 + 12k + 9) \quad -$$

$$= 4 \sum_{k=0}^n k^2 + 12 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 9 \quad -$$

$$= 4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 12 \frac{n(n+1)}{2} + 9(n+1) \quad -$$

Calculer les sommes suivantes

Exercice | 6

a) $\sum_{k=0}^n (k+1)^2$

b) $\sum_{k=0}^n k(k-1)$

c) $\sum_{k=0}^n 3^{k+1}$

d) $\sum_{k=0}^{2n} \frac{2^{k+1}}{5^k}$

e) $\sum_{k=0}^{n+1} (n-k+1)^2$

$\sum 9^k$

Astuce pour la question c)

$3^{k+1} = 3 \times 3^k$

constante

Calculer les sommes suivantes

Exercice | 6

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \sum_{k=0}^n (k+1)^2 &= \sum_{k=0}^n (k^2 + 2k + 1) \\
 &= \sum_{k=0}^n k^2 + 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 \quad \text{par linéarité de la somme} \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \frac{n(n+1)}{2} + 1 \times (n-0+1) \\
 &\quad \quad \quad = \underline{(n+1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \sum_{k=0}^n k(k-1) &= \sum_{k=0}^n (k^2 - k) \\
 &= \sum_{k=0}^n k^2 - \sum_{k=0}^n k \quad \text{par lin. de la somme} \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}
 \end{aligned}$$

Calculer les sommes suivantes

Exercice | 6

$$\begin{aligned} c) \sum_{k=0}^n 3^{k+1} &= \sum_{k=0}^n \boxed{3 \times} 3^k \\ &= \boxed{3 \times} \sum_{k=0}^n 3^k \quad \text{par lin de la somme} \\ &= 3 \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = 3 \times \frac{1-3^{n+1}}{-2} \end{aligned}$$

Calculer les sommes suivantes

Exercice | 6

$$1) \sum_{k=0}^{2n} \frac{2^{k+1}}{5^k} = \sum_{k=0}^{2n} 2 \left(\frac{2}{5}\right)^k$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{2n} \left(\frac{2}{5}\right)^k \quad \text{par lin de la somme}$$

$$= 2 \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{2n+1}}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)}$$

$$\frac{2^{k+1}}{5^k} = \frac{2 \times 2^k}{5^k} = \frac{2}{1} \times \frac{2^k}{5^k} = 2 \left(\frac{2}{5}\right)^k$$

Bu $\sum q^k$

$$\sum \boxed{} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Calculer les sommes suivantes

Exercice | 6

$$\begin{aligned}
 c) \quad \sum_{k=0}^{n+1} (n-k+1)^2 &= \sum_{k=0}^{n+1} (\underbrace{n^2}_{\text{green}} - \underbrace{2kn}_{\text{pink}} + \underbrace{2n}_{\text{green}} + \underbrace{k^2}_{\text{orange}} - \underbrace{2k}_{\text{pink}} + \underbrace{1}_{\text{green}}) \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} (n^2 + k + 1) + \sum_{k=0}^{n+1} k^2 + \sum_{k=0}^{n+1} (-2kn - 2k) \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} (n^2 + 2n + 1) + \sum_{k=0}^{n+1} k^2 + (-2n-2) \sum_{k=0}^{n+1} k \\
 &= (n^2 + 2n + 1)(n+1-0+1) + \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} + \frac{(-2n-2) \cdot \frac{n(n+1)}{2}}{1}
 \end{aligned}$$

$$(n-k+1)^2 = (n-k+1)(n-k+1) = n^2 - kn + n - kn + k^2 - k + n - k + 1$$