

Mathématiques appliquées

Évaluation
Sommes télescopiques

mardi 6 octobre 2026

Consigne. Rédiger sur feuille puis envoyer par mail ou message.

Exercice 1 — Compléter

1. $\sum_{k=p}^n a = \dots$

2. $\sum_{k=0}^n k = \dots$

3. $\sum_{k=0}^n k^2 = \dots$

4. Cas $q \neq 1$: $\sum_{k=0}^n q^k = \dots$

Exercice 2 — Appliquer le cours

On considère la fonction f définie sur $[-3, +\infty[$ par

$$f(x) = x^3 - 3x + 2.$$

Étudier les variations de f puis déterminer si elle admet un minimum et un maximum sur son ensemble de définition.

On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Qu'est-ce qu'une somme télescopique ?

$$\sum_{k=1}^5 ((k+1)^2 - k^2)$$

$$\begin{aligned} &= (\cancel{2^2} - 1^2) + (\cancel{3^2} - \cancel{2^2}) + (\cancel{4^2} - \cancel{3^2}) + (\cancel{5^2} - \cancel{4^2}) + (\cancel{6^2} - \cancel{5^2}) \\ &\quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ &\quad \quad \quad h=1 \quad \quad \quad h=2 \quad \quad \quad h=3 \quad \quad \quad h=4 \quad \quad \quad h=5 \\ &= \underbrace{-1^2} + \underbrace{6^2} \\ &= -1 + 36 \\ &= 35 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^5 ((k+1)^2 - k^2)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 ((k+1)^2 - k^2) &= (\cancel{2^2} - 1^2) + (\cancel{3^2} - \cancel{2^2}) + (\cancel{4^2} - \cancel{3^2}) \\ &\quad + (\cancel{5^2} - \cancel{4^2}) + (6^2 - \cancel{5^2}) \end{aligned}$$

Propriété

Soient $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$.

$$\sum_{k=p}^n (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_p$$

m expression
avec k et k+1

fin
début
poly
prop 2-1

Attention

Cette formule n'est pas à connaître par cœur : il faut surtout savoir l'appliquer en développant les premiers termes et les derniers termes.

Calculer les sommes $\sum_{k=1}^{100} ((k+1)^2 - k^2)$ et $\sum_{k=1}^n ((k-1)^2 - k^2)$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} ((k+1)^2 - k^2) &= \underbrace{(2^2 - 1^2)}_{k=1} + \underbrace{(3^2 - 2^2)}_{k=2} + \underbrace{(4^2 - 3^2)}_{k=3} + \dots \\ &\quad \dots + \underbrace{(100^2 - 99^2)}_{k=99} + \underbrace{(101^2 - 100^2)}_{k=100} \\ &= \boxed{-1^2 + 101^2} \text{ par somme télescopique} \end{aligned}$$

Calculer les sommes $\sum_{k=1}^{100} ((k+1)^2 - k^2)$ et $\sum_{k=1}^n ((k-1)^2 - k^2)$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} ((k+1)^2 - k^2) &= (2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + \dots \\ &\quad + (100^2 - 99^2) + (101^2 - 100^2) \end{aligned}$$

Utiliser les sommes télescopiques

Exemple | 4

Calculer les sommes $\sum_{k=1}^{100} ((k+1)^2 - k^2)$ et $\sum_{k=1}^n ((k-1)^2 - k^2)$.

$$\sum_{k=1}^{100} ((k+1)^2 - k^2) = (2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + \dots + (100^2 - 99^2) + (101^2 - 100^2)$$

par somme télescopique

$$= 101^2$$

$$\sum_{k=1}^n ((k-1)^2 - k^2) = (0^2 - 1^2) + (1^2 - 2^2) + \dots + ((n-2)^2 - (n-1)^2) + ((n-1)^2 - n^2)$$

par somme télescopique

$$= 0^2 - n^2 = -n^2$$

Utiliser les sommes télescopiques

Exercice | 5

Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=0}^{100} (e^k - e^{k+1})$

b) $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$

c) $\sum_{k=10}^{2n} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$

d) $\sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k}{k+1} \right)$

e) $\sum_{k=5}^{n-1} (2^{k+1} - 2^k)$

① écrire avec pointillés
② barre
③ on écrit le résultat

Astuce pour la question d)

Utiliser $\ln \left(\frac{a}{b} \right) = \ln(a) - \ln(b)$.

Pour aller plus loin

Exercices plus longs (sur le poly) : exercices 6, 14, 18.

Utiliser les sommes télescopiques

Exercice | 5

a) $\sum_{k=0}^{100} (e^k - e^{k+1})$

$$= \underbrace{(e^0 - e^1)}_{h=0} + \underbrace{(e^1 - e^2)}_{h=1} + \dots + \underbrace{(e^{99} - e^{100})}_{h=99} + \underbrace{(e^{100} - e^{101})}_{h=100}$$

$$= e^0 - e^{101}$$

$$= 1 - e^{101}$$

par somme télescopique

Utiliser les sommes télescopiques

Exercice | 5

$$b) \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots \\ &\quad \text{débute } k=1 \quad k=2 \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \quad \text{par somme télesc} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n-1+1} = \frac{1}{1} \\ &\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &\quad k=n-1 \quad k=n \quad \text{fin} \end{aligned}$$

$$c) \sum_{k=10}^{2n} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

$$= (\cancel{\sqrt{10}} - \sqrt{9}) + (\cancel{\sqrt{11}} - \cancel{\sqrt{10}}) + \dots + (\cancel{\sqrt{2n-1}} - \cancel{\sqrt{2n-2}}) + (\sqrt{2n} - \cancel{\sqrt{2n-1}})$$

$$= -\sqrt{9} + \sqrt{2n} \text{ par somme télesc.}$$

$$= -3 + \sqrt{2n}$$

$$= \sqrt{2n} - 3$$

$$d) \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k}{k+1} \right) = \ln(k) - \ln(k+1)$$

$$\begin{aligned} &= (\ln(1) - \cancel{\ln(2)}) + (\cancel{\ln(2)} - \ln(3)) + \dots + (\cancel{\ln(n)} - \ln(n+1)) \\ &= \underbrace{-\ln(1) - \ln(n+1)}_{=0} \text{ par somme télesc.} \\ &= -\ln(n+1) \end{aligned}$$

Utiliser les sommes télescopiques

Exercice | 5

$$e) \sum_{k=5}^{n-1} (2^{k+1} - 2^k)$$

$$= (\cancel{2^6} - 2^5) + (\cancel{2^7} - \cancel{2^6}) + \dots +$$

$$= -2^5 + 2^n \text{ par somme télesc}$$

$$= \boxed{2^n - 2^5}$$

$$\begin{array}{c} n-2+1 \\ \downarrow \\ (\cancel{2^{n-1}} - \cancel{2^{n-2}}) + (\cancel{2^n} - \cancel{2^{n-1}}) \\ k = n-2 \quad \quad k = n-1 \end{array}$$

On pose, pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k^2 + 3k + 2}{k^2 + 2k + 1} \right)$.

1. Factoriser $k^2 + 3k + 2$ et $k^2 + 2k + 1$.
2. En déduire que

$$\frac{k^2 + 3k + 2}{k^2 + 2k + 1} = \frac{k + 2}{k + 1}.$$

3. Montrer alors que

$$\ln \left(\frac{k^2 + 3k + 2}{k^2 + 2k + 1} \right) = \ln(k + 2) - \ln(k + 1).$$

4. En déduire une expression simplifiée de S_n .
5. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

$\triangle \rightarrow \begin{aligned} &\underline{a} (x - x_1) (x - x_2) \\ &a (x - x_0)^2 \end{aligned}$

Utiliser les sommes télescopiques

Exercice | 6

1. Factoriser $k^2 + 3k + 2$ et $k^2 + 2k + 1$.

2. En déduire que $\frac{k^2+3k+2}{k^2+2k+1} = \frac{k+2}{k+1}$.

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 = 1$$

$$\textcircled{1} \quad k^2 + 3k + 2 = 1(k - (-2))(k - (-1)) \quad \begin{matrix} x_1 = -2 \\ x_2 = -1 \end{matrix}$$
$$= (k+2)(k+1)$$

$$\underline{k^2 + 2k + 1} = (k+1)^2 \quad \Delta = 0 \quad x = -1$$
$$= 1(k - (-1))^2$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{k^2 + 3k + 2}{k^2 + 2k + 1} = \frac{(k+2)(k+1)}{(k+1)^2}$$
$$= \frac{(k+2)\cancel{(k+1)}}{(k+1)\cancel{(k+1)}}$$
$$= \frac{k+2}{k+1}$$

Utiliser les sommes télescopiques

Exercice | 6

3. Montrer alors que $\ln\left(\frac{k^2+3k+2}{k^2+2k+1}\right) = \ln(k+2) - \ln(k+1)$.
4. En déduire une expression simplifiée de S_n .

$$\textcircled{3} \quad \ln\left(\frac{k^2+3k+2}{k^2+2k+1}\right) = \ln\frac{k+2}{k+1} = \ln(k+2) - \ln(k+1)$$

$$\begin{aligned}\textcircled{4} \quad S_n &= \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k^2+3k+2}{k^2+2k+1}\right) = \sum_{k=1}^n (\underbrace{\ln(k+2)} - \underbrace{\ln(k+1)}) \\ &= (\cancel{\ln(3)} - \ln(2)) + (\cancel{\ln(4)} - \cancel{\ln(3)}) + \dots + (\ln(n+2) - \cancel{\ln(n+1)}) \\ &= -\ln(2) + \ln(n+2) \text{ par somme télesc.}\end{aligned}$$

5. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{-\ln(2)}_{\downarrow -\ln(2)} + \underbrace{\ln(n+2)}_{\downarrow +\infty} \right) = \boxed{+\infty}$$

"ln(+∞)"