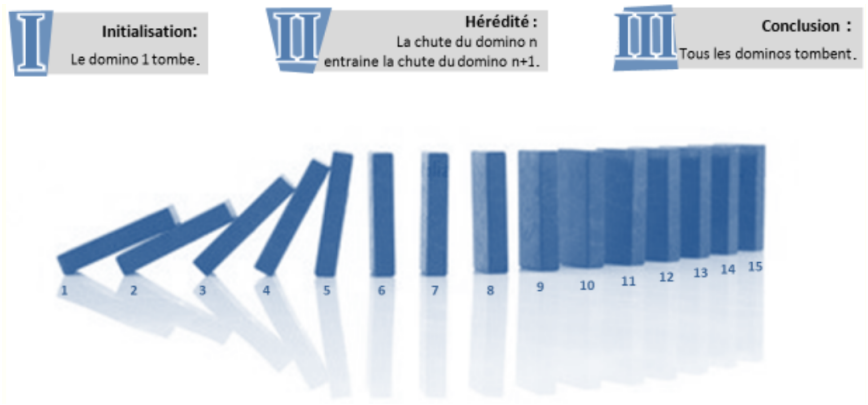
CHAPITRE 5

LE PRINCIPE DE RÉCURRENCE

1. Récurrence simple 2
2. Récurrence double 3
TD 4
1. Application de la récurrence simple et double 4
2. En autonomie 5
3. Approfondissement 5
4. Type DS ou concours 6
Bilan 7
1. Utiliser la récurrence 7
2. Erreurs classiques à éviter 7

Dans ce court chapitre nous allons étudier un type de raisonnement, le *raisonnement par récurrence*. On l'utilise pour prouver une propriété de la forme « pour tout entier n, on a... », pour laquelle un raisonnement direct ne permet pas d'aboutir.



1. Récurrence simple

Théorème 1 (Principe de récurrence)

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier n. Si

1. **Initialisation** : $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie pour un certain entier n_0,
2. **Hérédité** : $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$,

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Méthode 2 (Rédiger une démonstration par récurrence)

Pour rédiger rigoureusement une démonstration par récurrence, on suit le modèle suivant.

Pour tout $n \geq n_0$, soit $\mathcal{P}(n)$: ...	→ On énonce la propriété $\mathcal{P}(n)$ que l'on souhaite démontrer.
Initialisation. Pour $n = n_0$, on a ...	→ On démontre que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie. *Remplacer n_0 par sa valeur numérique et effectuer les calculs.*
Hérédité. Soit $n \geq n_0$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.	→ On pose un entier $n \geq n_0$ **fixé**. On montre que si la propriété est vraie au rang n alors la propriété est vraie au rang $n+1$ (ça peut être long!). Le fait de supposer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie s'appelle l'**hypothèse de récurrence**.
Conclusion. Donc, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie	→ On affirme que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple 3 : Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = 2v_n - 7$ pour tout entier naturel n. Démontrons par récurrence que $v_n = 7 - 3 \times 2^n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Exemple 4 : Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n+1$.

2. Récurrence double

Dans certains cas, lors de l'hérédité, nous aurons besoin de supposer la propriété vraie sur les 2 rangs précédents et pas seulement le précédent.

Théorème 5 (Principe de récurrence double)

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier n. Si

1. **Initialisation** : $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies pour un certain entier n_0,
2. **Hérédité** : $(\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$,

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Méthode 6 (Rédiger une démonstration par récurrence double)

Pour tout $n \geq n_0$, soit $\mathcal{P}(n)$: ...	→ On énonce la propriété $\mathcal{P}(n)$ que l'on souhaite démontrer.
Initialisation. Pour $n = n_0$, on a ... et pour $n = n_0+1$ on a ...	→ On démontre que $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies. *Remplacer n_0 par sa valeur numérique et effectuer les calculs.*
Hérédité. Soit $n \geq n_0$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies et montrons que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.	→ On pose un entier $n \geq n_0$ **fixé**. On montre que si la propriété est vraie aux rangs n et $n+1$ alors la propriété est vraie au rang $n+2$ (ça peut être long ici aussi !).
Conclusion. Donc, d'après le principe de récurrence double, pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie	→ On affirme que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple 7 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + 2^n$.

TD

1. Application de la récurrence simple et double

Exercice 1 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 4$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2 \times 5^n$.

Exercice 2 (Attention à l'initialisation) **:** Montrer que la proposition $\left(\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \geq n^2\right)$ est fausse. Montrer en revanche que la proposition $\left(\forall n \geq 4,\ 2^n \geq n^2\right)$ est vraie.

Exercice 3 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

Exercice 4 (Encadrement de suite) **:** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n}$. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n \leq 1$.

Exercice 5 (Les classiques) **:** Montrer par récurrence

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
4. Pour $q \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$
6. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
7. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k \times 2^{k-1} = n \times 2^{n+1} + 1$
8. $\forall a \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + an$
9. $\forall n \geq 3$, $n! \geq 2 \times 3^{n-2}$
10. $\forall n \geq 5$, $\dfrac{3^n}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-7}}$

Exercice 6 : Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} (2k-1)$.
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (4k-2) = \prod_{k=1}^{n} (n+k)$

Exercice 7 (Récurrence double) **:** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Démontrer par récurrence double que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 3 \times 2^n - 2.$$

Exercice 8 (Récurrence double) **:** On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$, $v_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$.
Démontrer par récurrence double que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 < v_n \leq 2^n.$$

Exercice 9 (Nombre de Fibonacci) **:** La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \geq 0, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
On pose également $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1. Montrer que φ et ψ sont racines d'un trinôme du second degré à coefficients entiers que l'on déterminera.
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $F_n = \dfrac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$.

Exercice 10 (Suite de fonctions) **:** Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}$ ainsi :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ et pour tout entier naturel n, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{n+2}(x) = 2x f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

1. Montrer par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(-x) = (-1)^n f_n(x)$.
2. En déduire que pour tout n, la fonction f_n a même parité que n.

2. En autonomie

Exercice 11 (Récurrence et suite) **:** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{8}{5}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 6u_n - 3$.
Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6^n + \dfrac{3}{5}$.

Exercice 12 (Récurrence et suite) **:** Soit u une suite telle que $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} \leq a \times u_n$ où a est un réel positif. Montrer par récurrence que $\forall n \geq 0$, $u_n \leq a^n \times u_0$.

Exercice 13 (Démontrer des propriétés) **:** Démontrer les propositions suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2!4!\ldots(2n)! \geq ((n+1)!)^n$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

Exercice 14 (Récurrence double) **:** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
Montrer par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = 2^n - n2^n$.

3. Approfondissement

Exercice 15 : Montrer que pour tout entier naturel n, $2^{2n} - (-1)^n$ est divisible par 5.

Exercice 16 : Démontrer les propriétés suivantes :

1. $\forall n \geq 1$, $(n+1)! \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^k.k! = (n!)^{n+1}$

Exercice 17 (Récurrence forte, hors programme) **:** On va utiliser ici le principe de récurrence forte, qui repose sur le théorème suivant :

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier n. Si

1. **Initialisation** : $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie pour un certain entier n_0,
2. **Hérédité** : "$\mathcal{P}(n_0), \mathcal{P}(n_0+1), \ldots, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$" est vraie pour tout entier $n \geq n_0$,

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{6(n+1)}{n(2n+1)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.
Vérifier par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2n^2$.

4. Type DS ou concours

Exercice 18 : Le but de cet exercice est de calculer de deux façons différentes la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^3.$$

On admettra la formule $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

1. Écrire S_n sans utiliser le symbole somme. De combien de termes cette somme est-elle composée ?
2. (a) Développer $(2k+1)^3$, pour $k \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire la valeur de S_n.
3. Prouver par récurrence que $S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Bilan

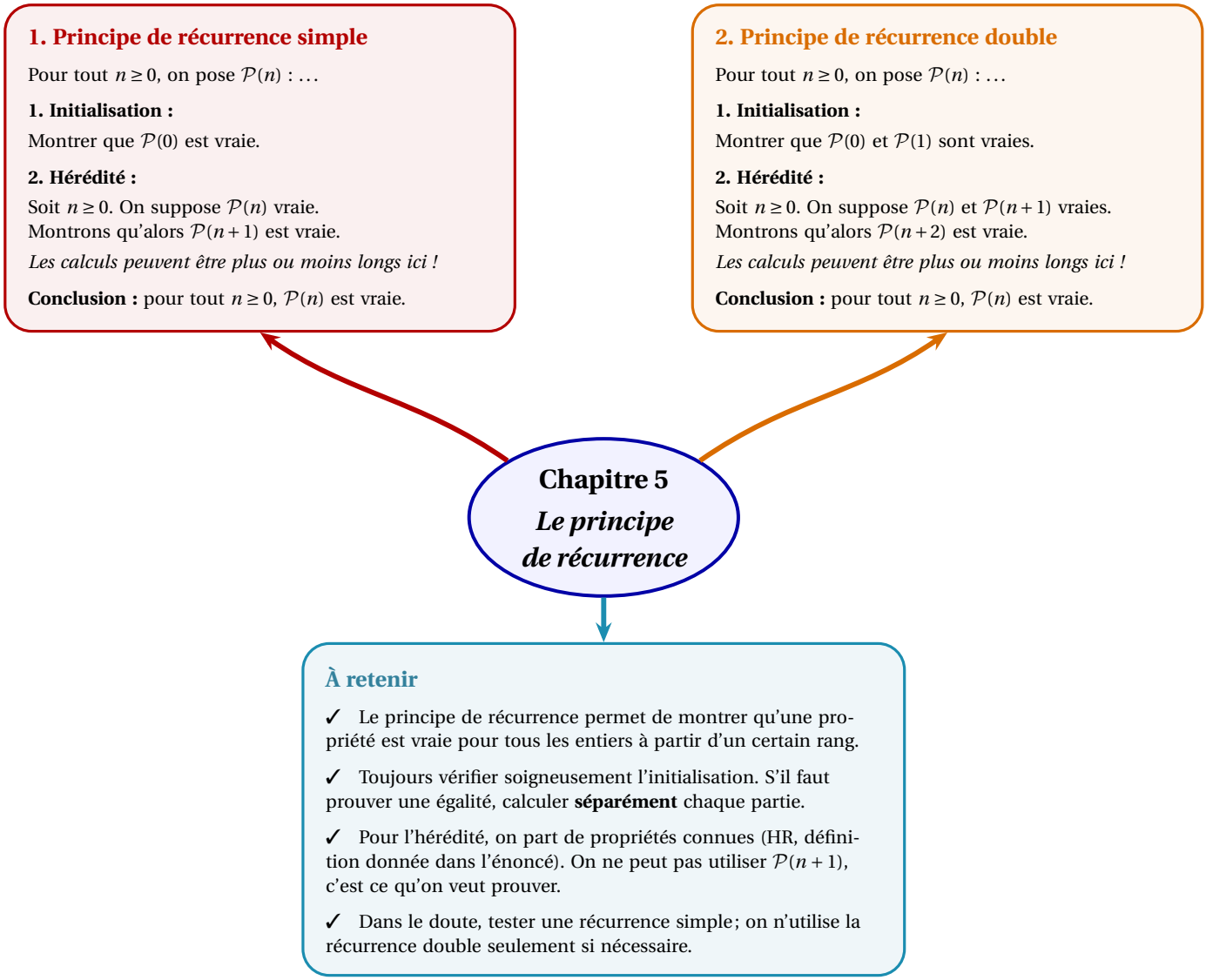
La récurrence est un type de raisonnement très courant. Vous en trouverez dans tous les DS en concours blancs. Donc prenez le temps de bien mémoriser les différentes étapes de rédaction !

1. Utiliser la récurrence

- ✔ **Quand l'utiliser ?** Si l'énoncé le précise explicitement « montrer par récurrence que... », ou si l'énoncé est sous la forme « montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a... » (attention : dans ce dernier cas, d'autres méthodes peuvent être possibles).
- ✔ **Quand ne pas l'utiliser ?**
  - → Si on peut directement prouver la propriété par un raisonnement direct. Ou si on se lance dans une récurrence et qu'on se rend compte que l'hypothèse de récurrence n'a pas été utilisée (dans ce cas c'est qu'on a construit un raisonnement direct)
  - → Si la propriété concerne un réel : « montrer que pour tout réel x on a... »
- ✔ **Comment l'utiliser ?** Avec les 3 étapes : Initialisation – Hérédité – Conclusion. Bien soigner la rédaction. ► Méthode 2 (rec. simple) et Méthode 6 (réc. double)
- ✔ **Récurrence simple ou double ?** La plupart du temps, une récurrence simple suffit. On utilise une récurrence double :
  - → Quand l'énoncé le précise.
  - → Quand vous voulez montrer des propriétés sur des suites récurrentes doubles, c'est-à-dire des suites définies par $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ avec a et $b \in \mathbb{R}$ et par les valeurs de u_0 et u_1.

2. Erreurs classiques à éviter

- ✔ **Propriété.** Ne pas oublier de définir clairement la propriété $\mathcal{P}(n)$. Pour la reconnaitre c'est simple : c'est le texte qui arrive derrière le « Monter que... »
- ✔ **Quantificateurs.** Dans l'étape d'hérédité, on définit « soit un entier n fixé » (qui correspond à un « il existe ») . Ne surtout pas supposer qu'elle est vraie pour tout n, c'est ce qui est à prouver !
- ✔ **Ordre de la rédaction.** On ne part pas de $\mathcal{P}(n+1)$, ça doit être la conclusion de l'hérédité. On peut l'écrire au brouillon pour clarifier les idées. Ensuite dans la rédaction, on part de $\mathcal{P}(n)$ qui est l'hypothèse de récurrence.



Remarque : Pour alléger les notations, on indique ici les rédactions dans le cas où $n_0 = 0$. À adapter selon l'énoncé : par exemple si on demande de prouver la propriété pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on partira du rang 1.