CHAPITRE 5

RÉCURRENCE

1. Application de la récurrence simple et double 1
2. En autonomie 8
3. Approfondissement 11
4. Type DS ou concours 13

1. Application de la récurrence simple et double

☼ **Exercice 1 :** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 4$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2 \times 5^n$.

Ébauche de démonstration.

Initialisation. On trouve $u_0 = 3$ et $1 + 2 \times 5^0 = 3$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. On suppose $u_n = 1 + 2 \times 5^n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5u_n - 4 \\ &= 5(1 + 2 \times 5^n) - 4 \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 5 + 2 \times 5^{n+1} - 4 \\ &= 2 \times 5^{n+1} + 1 \end{aligned}$$

☼ **Exercice 2** (Attention à l'initialisation) **:** Montrer que la proposition $\left(\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \geq n^2\right)$ est fausse. Montrer en revanche que la proposition $\left(\forall n \geq 4,\ 2^n \geq n^2\right)$ est vraie.

• Pour $n = 3$ on trouve $2^3 = 8$ et $3^2 = 9$. Donc la propriété $2^n \geq n^2$ n'est pas vraie pour $n = 3$.
On en déduit que la proposition $\left(\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \geq n^2\right)$ est fausse.

• Pour tout $n \geq 4$, soit $\mathcal{P}(n) : 2^n \geq n^2$.

Initialisation. Pour $n = 4$ on a $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$.
Donc $\mathcal{P}(4)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 4$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Alors par hypothèse de récurrence on a

$$\begin{aligned} & 2^n \geq n^2 \\ \Rightarrow\ & 2^{n+1} \geq 2n^2 \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que $2n^2 \geq (n+1)^2$.
Cette propriété est équivalente à $2n^2 - (n+1)^2 \geq 0$. On va donc étudier le signe de ce polynôme.

$x^2 - (x+1)^2 = x^2 - 2x - 1$
On obtient un trinôme du second degré. On trouve comme discriminant $\Delta = 8$ puis comme racines $x_1 = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = 1+\sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{2-\sqrt{8}}{2} = 1-\sqrt{2}$.
Le polynôme est donc positif sur $]-\infty; 1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2}; +\infty[$.
Or on considère ici $n \geq 4$. En particulier on a alors $n \geq 1+\sqrt{2}$.
On en déduit que $2n^2 - (n+1)^2 \geq 0$ et par conséquent, $2^{n+1} \geq (n+1)^2$.
Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par principe de récurrence, on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 4$.

☼ **Exercice 3 :** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

Ébauche de démonstration.

Initialisation. $u_0 = 2 = \dfrac{2}{2\times 0+1}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. On suppose $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$. On a alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{1+u_n} \\ &= \frac{\frac{2}{2n+1}}{1+\frac{2}{2n+1}} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{2}{2n+1} \times \frac{2n+1}{2n+3} \\ &= \frac{2}{2n+3} \\ &= \frac{2}{2(n+1)+1} \end{aligned}$$

Exercice 4 (Encadrement de suite) **:** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n}$. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n \leq 1$.

Ébauche de démonstration.

Initialisation. On trouve $u_1 = \dfrac{1}{2}$, donc $0 < u_1 \leq 1$. $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. On suppose $0 < u_n \leq 1$.

Alors $u_{n+1} > 0$ par quotient de nombres positifs.

De plus,

$$\begin{aligned}
&u_n \leq 1 \\
&\Rightarrow 2u_n \leq 1 + u_n \quad \text{en ajoutant } u_n \\
&\Rightarrow 1 + 2u_n \leq 2 + u_n \quad \text{en ajoutant 1} \\
&\Rightarrow \frac{1+2u_n}{2+u_n} \leq 1 \quad \text{en divisant par } 2 + u_n > 0 \\
&\Rightarrow u_{n+1} \leq 1
\end{aligned}$$

Exercice 5 (Les classiques) **:** Montrer par récurrence

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
4. Pour $q \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$
6. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
7. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k \times 2^{k-1} = n \times 2^{n+1} + 1$
8. $\forall a \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + an$
9. $\forall n \geq 3$, $n! \geq 2 \times 3^{n-2}$
10. $\forall n \geq 5$, $\dfrac{3^n}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-7}}$

Ici encore je note les idées des démonstrations, sans détailler la rédaction. Attention à bien vérifier à quelle valeur appliquer l'initialisation.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

   Initialisation. Pour $n = 0$ on obtient 0 dans les deux membres.

   Hérédité. On suppose $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Alors :

   $$\sum_{k=0}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=0}^{n} k = (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Initialisation. Pour $n = 0$ on obtient 0 dans les deux membres.
Hérédité. On suppose $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \sum_{k=0}^{n} k^2 = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

3. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
Initialisation. Pour $n = 0$, on obtient 0 dans les deux membres.
Hérédité. On suppose $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= (n+1)^3 + \sum_{k=0}^{n} k^3 \\
&= (n+1)^3 + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\
&= (n+1)^2\left(n+1+\frac{n^2}{4}\right) \\
&= (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) \\
&= (n+1)^2\frac{(n+2)^2}{4} \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

4. Pour $q \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
Initialisation. Pour $n = 0$, on obtient 1 dans les deux membres.
Hérédité. On suppose $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = q^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} q^k = q^{n+1} + \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}-q^{n+2}+1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

5. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$
Initialisation. Pour $n = 1$, on obtient 1 dans les deux membres.
Hérédité. On suppose $\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (2n+1) + \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = (2n+1) + n^2 = (n+1)^2$$

6. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Initialisation. Pour $n=1$, on obtient $\dfrac{1}{2}$ dans les deux membres.

Hérédité. On suppose $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$. Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)}&=\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{n}{n+1}\\&=\frac{1+2n+n^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}\end{aligned}$$

7. $\forall n\in\mathbb{N},\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}k\times 2^{k-1}=n\times 2^{n+1}+1$

Initialisation. Pour $n=0$, on obtient 1 dans les deux membres.

En effet, $\displaystyle\sum_{k=1}^{1}k2^{k-1}=1\times 2^0=1$

et d'autre part, $0\times 2^1+1=1$.

Hérédité. On suppose $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}k\times 2^{k-1}=n\times 2^{n+1}+1$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+2}k\times 2^{k-1}&=(n+2)2^{n+1}+\sum_{k=1}^{n+1}k\times 2^{k-1}\\&=(n+2)2^{n+1}+n\times 2^{n+1}+1\\&=n\times 2^{n+1}\times 2+2^{n+2}+1\\&=n\times 2^{n+2}+2^{n+2}+1\\&=(n+1)2^{n+2}+1\end{aligned}$$

8. $\forall a\in\mathbb{R}_+$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $(1+a)^n\geq 1+an$

Ici on fixe $a\in\mathbb{R}_+$ dès le départ. On utilise ensuite un raisonnement par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.

Initialisation. Pour $n=0$ on obtient 1 dans les deux membres. On a bien $1\geq 1$.

Hérédité. On suppose $(1+a)^n\geq 1+an$. Alors

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1}&=(1+a)(1+a)^n\\&\geq(1+a)(1+an)=1+(n+1)a+a^2n\\&\geq 1+(n+1)a\quad \text{car } a^2n\geq 0\end{aligned}$$

9. $\forall n\geq 3,\quad n!\geq 2\times 3^{n-2}$

Initialisation. Pour $n=3$ on obtient 6 dans les deux membres. On a bien $6\geq 6$.

Hérédité.

$$\begin{aligned}(n+1)!&=(n+1)n!\\&\geq(n+1)\times 2\times 3^{n-2}=2\times 3^{n-1}\times\frac{n+1}{3}\end{aligned}$$

Or $n\geq 3\Rightarrow n+1\geq 4\Rightarrow \dfrac{n+1}{3}\geq\dfrac{4}{3}\geq 1$.

On en déduit que $(n+1)!\geq 2\times 3^{n-1}$

10. $\forall n \geq 5, \quad \dfrac{3^n}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-7}}$

Initialisation. Pour $n = 5$ on obtient $\dfrac{3^5}{5!} = \dfrac{81}{40}$ et $\dfrac{1}{2^{5-7}} = 4$. On a bien $\dfrac{81}{40} \leq 4$.

Hérédité. On suppose $\dfrac{3^n}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-7}}$.

$$\begin{aligned}\frac{3^{n+1}}{(n+1)!} &= \frac{3^n}{n!} \times \frac{3}{n+1} \\ &\leq \frac{1}{2^{n-7}} \times \frac{3}{n+1} \text{ par HR} \\ &\leq \frac{1}{2^{n-7}} \times \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Dans la dernière inégalité on utilise le fait que $n \geq 5 \Rightarrow n+1 \geq 6 \Rightarrow \dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{6} \Rightarrow \dfrac{3}{n+1} \leq \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

On obtient donc $\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!} \leq \dfrac{1}{2^{n+1-7}}$ qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$

Exercice 6 : Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$.
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$

1. Pour $n \geq 1$ on pose $\mathcal{P}(n) : \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$.

Initialisation. Pour $n = 1$ on trouve $\displaystyle\prod_{k=1}^{1}(1+k) = 2$ et $2^1 \displaystyle\prod_{k=1}^{1}(2k-1) = 2$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1}(n+1+k) &= \prod_{j=2}^{n+2}(n+j) \text{ en appliquant le changement de variable } j = k+1 \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{n+1}\prod_{j=1}^{n}(n+j) \text{ on a extrait du produit les facteurs d'indices } n+1 \text{ et } n+2 \\ &\quad \text{et on a ajouté celui d'indice 1} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{n+1}2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= (2n+1)2^{n+1}\prod_{k=1}^{n}(2k-1) \\ &= 2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}(2k-1)\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence, on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pour $n \geq 1$ on pose $\mathcal{P}(n) : \prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$.

   Initialisation. Pour $n = 1$ pour trouve $\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = 2$ et $\prod_{k=1}^{n}(n+k) = 2$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1}(4k-2) &= (4(n+1)-2)\prod_{k=1}^{n}(4k-2) \text{ on a extrait le facteur d'indice } n+1 \\
&= (4n+2)\prod_{k=1}^{n}(n+k) \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= (4n+2)\prod_{j=0}^{n-1}(n+1+j) \text{ par changement d'indice } j = k-1 \\
&= \frac{(4n+2)(n+1)}{(2n+1)(2n+2)}\prod_{j=1}^{n+1}(n+1+j) \\
&= \prod_{j=1}^{n+1}(n+1+j) \text{ après simplification de la fraction}
\end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Par principe de récurrence, on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7 (Nombre de Fibonacci) **:** Pour tout n, la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \geq 0, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

On pose également $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1. Montrer que φ et ψ sont racines d'un trinôme du second degré à coefficients entiers que l'on déterminera.
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $F_n = \dfrac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$.

1. φ et ψ sont racines du polynôme $(x-\varphi)(x-\psi) = x^2 - x - 1$.
   On trouve la forme finale après avoir remplacé par les valeurs de φ et ψ puis développé, en faisant attention à la manipulation des racines carrées.
2. **Ébauche de rédaction.** On utilise un raisonnement par double récurrence.
   Initialisation. On trouve $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$, ces valeurs vérifient bien l'égalité donnée.
   Hérédité. On suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies, et on montre que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
   On remarque que φ et ψ étant racines du polynôme donné à la question précédente, on a

$\varphi^2 = \varphi + 1$ et $\psi^2 = \psi + 1$.

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \\ &= \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{\varphi^{n+1} + \varphi^n - \psi^{n+1} - \psi^n}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\varphi^n(\varphi+1) - \psi^n(\psi+1)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\varphi^n\varphi^2 - \psi^n\psi^2}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\varphi^{n+2} - \psi^{n+2}}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Exercice 8 (Suite de fonctions) **:** Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}$ ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ et pour tout entier naturel n, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad f_{n+2}(x) = 2x f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

1. Montrer par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(-x) = (-1)^n f_n(x)$.
2. En déduire que pour tout n, la fonction f_n a même parité que n.

1. *Ébauche de démonstration.*
   Initialisation. $f_0(-x) = 1 = (-1)^0 f_0(x)$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   $f_1(-x) = -x = (-1)^1 f_1(x)$ donc f_1 est impaire. $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   Hérédité. On suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ et on montre $\mathcal{P}(n+2)$. On a f_{n+2} définie sur $\mathbb{R}$ centré en 0 et

$$\begin{aligned} f_{n+2}(-x) &= -2x f_{n+1}(-x) - f_n(-x) \\ &= -2x(-1)^{n+1} f_{n+1}(x) - (-1)^n f_n(x) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= (-1)^{n+2}(2x f_{n+1}(x) - f_n(x)) \\ &= (-1)^{n+2} f_{n+2}(x) \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. f_n est définie sur $\mathbb{R}$ centrée en 0. Par ailleurs, $(-1)^n$ vaut 1 si n est pair, et -1 si n est impair. On en déduit que

$$f_n(-x) = (-1)^n f_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si } n \text{ est pair} \\ -f_n(x) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

   Ainsi : si n est pair, alors f_n est une fonction paire. Si n est impair, alors f_n est une fonction impaire.
   Donc f_n a la même parité que n.

2. En autonomie

Exercice 9 (Récurrence et suite) **:** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{8}{5}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 6u_n - 3$. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6^n + \dfrac{3}{5}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : u_n = 6^n + \dfrac{3}{5}$.

Initialisation. Pour $n = 0$ on a $u_0 = \dfrac{8}{5}$ et $6^0 + \dfrac{3}{5} = \dfrac{8}{5}$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 6u_n - 3 \text{ par définition de } u_n \\ &= 6\left(6^n + \frac{3}{5}\right) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= 6^{n+1} + \frac{18}{5} - 3 \\ &= 6^{n+1} + \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence, on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 (Récurrence et suite) **:** Soit u une suite telle que $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} \leq a \times u_n$ où a est un réel positif. Montrer par récurrence que $\forall n \geq 0$, $u_n \leq a^n \times u_0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) :\ u_n \leq a^n u_0$.

Initialisation. Pour $n = 0$ on a $a^0 u_0 = u_0$, donc $u_0 \leq a^0 u_0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a

$$\begin{aligned} & u_{n+1} \leq a u_n && \text{par hypothèse donnée dans l'énoncé} \\ & \Rightarrow u_{n+1} \leq a \times a^n u_0 && \text{car } u_n \leq a^n u_0 \text{ par hypothèse de récurrence} \\ & \Rightarrow u_{n+1} \leq a^{n+1} u_0 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 (Démontrer des propriétés) **:** Démontrer les propositions suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2!4!\ldots(2n)! \geq ((n+1)!)^n$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2!4!\dots(2n)! \geq ((n+1)!)^n$
   Pour $n \geq 1$ on pose $\mathcal{P}(n) : 2!4!\dots(2n)! \geq ((n+1)!)^n$.
   Initialisation. Pour $n = 1$ pour trouve $2! = 2$ et $((1+1)!)^1 = 2$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a

$$\begin{aligned} 2!4!\dots(2(n+1))! &= 2!4!\dots(2n+2)! \\ &\geq (2n+2)!\,((n+1)!)^n \text{ par hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

   Par ailleurs,

$$\begin{aligned} (2n+2)! &= \prod_{k=1}^{2n+2} k \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n+1} k\right)\left(\prod_{k=n+2}^{2n+2} k\right) \\ &\geq (n+1)!(n+2)^{n+1} \end{aligned}$$

   En minorant k par $n+2$ dans le second produit, ce qui donne un produit de $n+1$ facteurs constants.
   On a donc

$$2!4!\dots(2(n+1))! \geq (n+1)!(n+2)^{n+1}((n+1)!)^n = ((n+2)!)^{n+1}$$

   Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Par principe de récurrence, on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$
   Pour $n \geq 1$ on pose $\mathcal{P}(n) : \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.
   Initialisation. Pour $n = 1$ pour trouve $\displaystyle\sum_{k=1}^{2\times 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2}$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n+1+j} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \text{ avec le changement de variable } j = k-1 \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+j} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+j} \text{ après avoir simplifié la somme de fractions} \end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Par principe de récurrence, on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 12 (Récurrence double) **:** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
Montrer par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = 2^n - n2^n$.

Pour $n \geq 0$ on pose $\mathcal{P}(n) : u_n = 2^n(1-n)$.

Initialisation.
Pour $n = 0$ pour a $u_0 = 1$ et $2^0(1-0) = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Pour $n = 1$ pour a $u_1 = 0$ et $2^1(1-1) = 0$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies, et montrons que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence on sait que $u_n = 2^n(1-n)$ et $u_{n+1} = 2^{n+1}(1-(n+1)) = -2^{n+1}n$.

Pour faciliter les calculs on pense à écrire le but au brouillon : au rang $n+2$ on doit obtenir $u_{n+2} = 2^{n+2}(1-(n+2))$ soit $u_{n+2} = 2^{n+2}(-1-n)$

Donc

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 4u_{n+1} - 4u_n \quad \text{par définition} \\
&= 4(-2^{n+1}n) - 4 \times 2^n(1-n) \quad \text{en appliquant les hypothèses de récurrence} \\
&= -2^{n+2} \times (2n) - 2^{n+2}(1-n) \\
&= 2^{n+2}(-2n-1+n) \\
&= 2^{n+2}(-n-1) \\
&= 2^{n+2}(1-(n+2))
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Conclusion. Par principe de récurrence double, on en déduit que $\boxed{\mathcal{P}(n) \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

3. Approfondissement

Exercice 13 : Montrer que pour tout entier naturel n, $2^{2n} - (-1)^n$ est divisible par 5.

Ébauche de démonstration.

Initialisation. $2^{2\times 0} - (-1)^0 = 0$. On obtient bien un multiple de 5 (car $0 = 5 \times 0$), donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. On suppose que $2^{2n} - (-1)^n$ est multiple de 5. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^{2n} - (-1)^n = 5k$.

On a donc

$$\begin{aligned}
&2^{2n} - (-1)^n = 5k \quad \text{hypothèse de récurrence}\\
&\Rightarrow (2^{2n} - (-1)^n) \times 4 = 5k \times 4\\
&\Rightarrow 2^{2n+2} - 4(-1)^n = 5k \times 4\\
&\Rightarrow 2^{2(n+1)} - (-1)^{n+1} + (-1)^{n+1} - 4(-1)^n = 5k \times 4\\
&\Rightarrow 2^{2(n+1)} - (-1)^{n+1} = -(-1)^{n+1} + 4(-1)^n + 5k \times 4\\
&\Rightarrow 2^{2(n+1)} - (-1)^{n+1} = (-1)^n(-(-1)+4) + 5k \times 4 = (-1)^n \times 5 + 5k \times 4\\
&\Rightarrow 2^{2(n+1)} - (-1)^{n+1} = 5((-1)^n + 4k)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Exercice 14 : Démontrer les propriétés suivantes :

1. $\forall n \geq 1,\ (n+1)! \geq \sum_{k=1}^{n} k!$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \prod_{k=1}^{n} k^k.k! = (n!)^{n+1}$

1. *Ébauche de démonstration.*

   Initialisation. Pour $n = 1$ on a $(1+1)! = 2$ et $\sum_{k=1}^{1} k! = 1! = 1$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

   Hérédité. On suppose $(n+1)! \geq \sum_{k=1}^{n} k!$. On a alors

   $$\begin{aligned}
   &(n+2)! = (n+2)(n+1)!\\
   &\Rightarrow (n+2)! \geq (n+2)\sum_{k=1}^{n} k! \quad \text{par hypothèse de récurrence}
   \end{aligned}$$

   Par ailleurs,

   $$\begin{aligned}
   (n+2)\sum_{k=1}^{n} k! &= \sum_{k=1}^{n} k! + (n+1)\sum_{k=1}^{n} k!\\
   &= \sum_{k=1}^{n} k! + (n+1)n! + (n+1)\sum_{k=1}^{n-1} k!\\
   &\geq \sum_{k=1}^{n} k! + (n+1)! = \sum_{k=1}^{n+1} k!
   \end{aligned}$$

   On a donc $(n+2)! \geq \sum_{k=1}^{n+1} k!$, on en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

2. *Ébauche de démonstration.*

   Initialisation. Pour $n = 1$ on trouve $\prod_{k=1}^{1} k^k.k! = 1$ et $(1!)^{1+1} = 1$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. On suppose $\prod_{k=1}^{n} k^k.k! = (n!)^{n+1}$. Alors on a

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1} k^k.k! &= \left(\prod_{k=1}^{n} k^k.k!\right)(n+1)^{n+1}(n+1)! \\ &= (n!)^{n+1}(n+1)^{n+1}(n+1)! \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= ((n+1)!)^{n+1} \times (n+1)! \\ &= ((n+1)!)^{n+2}\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Exercice 15 (Récurrence forte, hors programme) **:** On va utiliser ici le principe de récurrence forte, qui repose sur le théorème suivant :

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier n. Si

1. **Initialisation** : $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie pour un certain entier n_0,
2. **Hérédité** : "$\mathcal{P}(n_0), \mathcal{P}(n_0+1), \ldots, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$" est vraie pour tout entier $n \geq n_0$,

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{6(n+1)}{n(2n+1)} \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Vérifier par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2n^2$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{P}(n) : u_n = 2n^2$.

Initialisation. Pour $n = 1$ on a $u_1 = 2 = 2 \times 1^2$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \leq n$, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \frac{6(n+1)}{n(2n+1)} \sum_{k=1}^{n} u_k \\ &= \frac{6(n+1)}{n(2n+1)} \sum_{k=1}^{n} 2k^2 \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{6(n+1)}{n(2n+1)} 2 \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \frac{6(n+1)}{n(2n+1)} 2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= 2(n+1)^2\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Par principe de récurrence forte, on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Type DS ou concours

Exercice 16 : Le but de cet exercice est de calculer de deux façons différentes la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^3.$$

On admettra la formule $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

1. Écrire S_n sans utiliser le symbole somme. De combien de termes cette somme est-elle composée ?
2. (a) Développer $(2k+1)^3$, pour $k \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire la valeur de S_n.
3. Prouver par récurrence que $S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. $S_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n+1)^3$.
   Cette somme est composée de $(n-0+1)$, soit $n+1$ termes.
2. (a) Pour $k \in \mathbb{N}$, on a
   $(2k+1)^3 = (2k+1)(2k+1)^2 = (2k+1)(4k^2+4k+1) = 8k^3+8k^2+2k+4k^2+4k+1 = 8k^3+12k^2+6k+1$
   (b) On a donc

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^3 \\
&= \sum_{k=0}^{n} (8k^3+12k^2+6k+1) \\
&= 8\sum_{k=0}^{n} k^3 + 12\sum_{k=0}^{n} k^2 + 6\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 \\
&= 8\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 12\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6\frac{n(n+1)}{2} + 1(n+1) \\
&= (n+1)\left(2n^2(n+1) + 2n(2n+1) + 3n + 1\right) \\
&= (n+1)(2n^3+2n^2+4n^2+2n+3n+1) \\
&= (n+1)(2n^3+6n^2+5n+1)
\end{aligned}$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{P}(n) : S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$.
   Prouvons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Initialisation. Pour $n = 0$ on a
   $S_n = S_0 = \sum_{k=0}^{0} (2k+1)^3 = (2\times 0+1)^3 = 1^3 = 1$
   $(n+1)^2(2n^2+4n+1) = 1^2 \times 1 = 1$
   Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} (2k+1)^3 \\ &= \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^3 + (2(n+1)+1)^3 \quad \text{par la relation de Chasles} \\ &= (n+1)^2(2n^2+4n+1) + (2n+3)^3 \end{aligned}$$

En développant et réduisant chacune des expressions, on trouve
$(n+1)^2(2n^2+4n+1) + (2n+3)^3 = 2n^4+16n^3+47n^2+60n+28$
$((n+1)+1)^2(2(n+1)^2+4(n+1)+1) = 2n^4+16n^3+47n^2+60n+28$
Ce qui permet de conclure $S_{n+1} = ((n+1)+1)^2(2(n+1)^2+4(n+1)+1)$
Donc la propriété est vraie au rang $(n+1)$.

Conclusion. Par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.