CHAPITRE 6

GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

1. La notion de suite . . . 2
   - 1.1 Définition d'une suite . . . 2
   - 1.2 Construction d'une suite . . . 2
     - a. Par son terme général (formule explicite) . . . 2
     - b. Par une relation de récurrence . . . 2
     - c. Totalement implicitement . . . 4
   - 1.3 Représentation graphique des suites . . . 4
   - 1.4 Égalité de suites . . . 5
2. Propriétés globales des suites . . . 5
   - 2.1 Suites majorées, minorées, bornées . . . 5
   - 2.2 Sens de variations des suites . . . 7
   - 2.3 Étude des variations d'une suite en pratique . . . 8
     - a. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ . . . 8
     - b. Comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 . . . 9
     - c. Cas où $u_n = f(n)$ (formule explicite) . . . 10
     - d. Cas où $u_{n+1} = f(u_n)$ et f croissante (relation de récurrence) . . . 10
3. Programmation en Python . . . 13

TD . . . 14

1. Montrer qu'une suite est bien définie et conjecturer . . . 14
2. Représentation graphique des suites . . . 14
3. Montrer qu'une suite est bornée . . . 14
4. Étudier le sens de variations d'une suite . . . 14
5. En autonomie . . . 15
6. Approfondissement . . . 15
7. Type DS ou concours . . . 16

Bilan . . . 17

1. Méthodes à retenir . . . 17
2. Erreurs classiques à éviter . . . 17

1. La notion de suite

1.1 Définition d'une suite

Définition 1 (Suite)

Une **suite numérique réelle** u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$: $n \mapsto u(n)$. Le réel $u(n)$ est noté u_n et s'appelle le **terme de rang** n (ou **d'indice** n) de la suite.
On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

***Remarque* 2 :**

1. Une suite peut être définie à partir d'un entier non nul n_0 plutôt que sur $\mathbb{N}$. La suite se note alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ (on note parfois plus simplement (u_n) ou u s'il n'y a pas d'ambiguïté).
2. Attention aux notations :
   u
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   (u_n)
   u_n

1.2 Construction d'une suite

a. Par son terme général (formule explicite)

On peut construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en donnant l'expression de u_n en fonction de n. On peut alors immédiatement calculer chaque terme de la suite en fonction de son rang. On peut noter $u_n = f(n)$ où f est une fonction au moins définie sur $\mathbb{N}$.

Exemple 3 : Soit $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ pour $x > -1$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_{10}.

***Remarque* 4 :**

1. On dit que (u_n) est la **restriction de f sur** $\mathbb{N}$.
2. En général, $u_n + 1 \neq u_{n+1}$. Par exemple, ici, $u_0 + 1 \neq u_1$ et $u_1 + 1 \neq u_2$.

b. Par une relation de récurrence

On peut aussi construire une suite en donnant un ou plusieurs termes initiaux et une relation de récurrence qui permet de calculer les termes suivants à l'aide de ceux déjà connus. Le calcul des termes se fait dans ce cas pas à pas.

Exemple 5 : Soit $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ pour $x > -1$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = f(a_n)$. Calculer a_1, a_2, a_3 et a_{10}.

***Remarque* 6 :**

1. Peut-on définir la même suite avec $a_0 = -\dfrac{1}{2}$?

2. La suite (u_n) de l'exemple 3 et la suite (a_n) de l'exemple 5 sont définies avec la même fonction, mais elles sont totalement différentes. Par exemple, $a_2 \neq u_2$.

Exercice 7 : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ où $(a_n)_{n\geq 0}$ est la suite de l'exemple précédent.

Exemple 8 : Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+2} = c_{n+1}^2 + 2c_n + 1$. Calculer c_2 et c_3.

Exemple 9 : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3}{2k+5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer v_0 puis exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. Totalement implicitement

Enfin, les suites peuvent être définies de manière implicite. Dans l'exemple suivant, nous allons montrer que les termes d'une suite peuvent être solutions d'équations.

Exercice 10 : Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des solutions positives de l'équation $x(x+2)=n$. Calculer w_0, w_1 puis w_n pour $n\in\mathbb{N}$.

1.3 Représentation graphique des suites

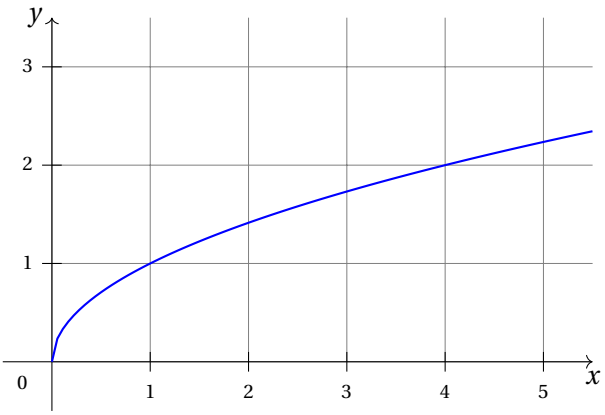
La méthode de représentation graphique n'est pas la même pour les suites définies explicitement et les suites définies par une relation de récurrence.

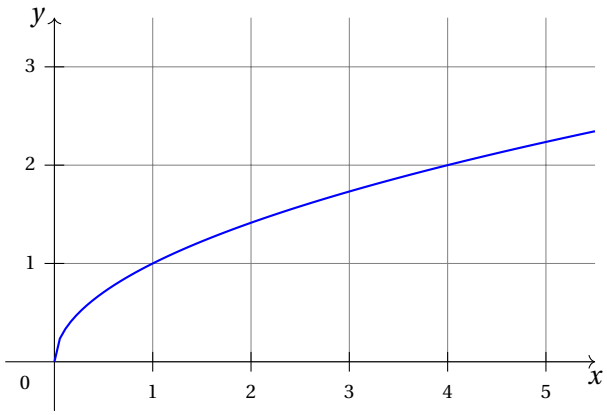
Méthode 11 (Représentation graphique des suites)

1. Pour les **suites définies explicitement** : pour chaque $n\in\mathbb{N}$ sur l'axe des abscisses, on associe la valeur u_n en ordonnée.
2. Pour les **suites définies par une relation de récurrence $\mathbf{u_{n+1}=f(u_n)}$** :
   (a) On commence par tracer la courbe de f et la droite d'équation $y=x$.
   (b) On place u_0 sur l'axe des abscisses.
   (c) On va sur l'image de u_0 qui est u_1 (on se déplace verticalement pour aller sur la courbe), on reporte cette valeur sur la bissectrice (on se déplace horizontalement) et on reporte la valeur sur l'axe des abscisses (on se déplace verticalement). On a u_1 sur l'axe des abscisses.
   (d) On répète le procédé autant de fois que nécessaire.

Exemple 12 : Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

1. Soit (u_n) la suite définie par $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=f(n)=\sqrt{n}$. Représenter graphiquement la suite (u_n) .
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_0=4$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=f(v_n)=\sqrt{v_n}$. Représenter graphiquement la suite (v_n).





***Remarque* 13 :** Une fois de plus, on remarque que les constructions « $u_n = f(n)$ » et « $u_{n+1} = f(u_n)$ » conduisent à des suites très différentes.

1.4 Égalité de suites

Définition 14 (Suites égales)

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_1}$ deux suites. On dit que les suites $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_1}$ sont **égales** lorsque $n_0 = n_1$ et $\forall n \geq n_0$, $u_n = v_n$.

***Remarque* 15 :** On peut avoir 2 suites égales, l'une donnée par une relation explicite et l'autre donnée par une relation de récurrence.

2. Propriétés globales des suites

2.1 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 16 (Suite majorée, minorée, bornée)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** lorsqu'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. On dit alors que M est un **majorant de la suite** (u_n).
2. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** lorsqu'il existe un réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$. On dit alors que m est un **minorant de la suite** (u_n).
3. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

***Remarque* 17 :** Comme pour les fonctions, une suite **majorée** admet une infinité de majorants et une suite **minorée** admet une infinité de minorants.

Proposition 18 (Caractérisation des suites bornées)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** ssi il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

Proposition 19 (Suite non majorée, non minorée, non bornée)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **non majorée** si $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > M$.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **non minorée** si $\forall m \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n < m$.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **non bornée** si $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, |u_n| > M$.

Méthode 20 (Comment montrer qu'une suite est majorée, minorée, bornée ?)

1. Si la suite est définie sous forme explicite :
   - → **Avec des inégalités.** On peut essayer de le montrer directement. Par exemple, on est souvent dans le cas où les suites sont positives et donc minorées par 0. Dans les cas plus compliqués, on pourra enchaîner des inégalités jusqu'à arriver à une constante.
   - → **Par différence.** Pour montrer une inégalité du type $u_n \leq a$, on peut aussi se ramener à l'inégalité $u_n - a \leq 0$ ou $a - u_n \geq 0$.
2. Si la suite est définie par une relation de récurrence :
   - → **Par récurrence.** Si la suite est définie par une relation de récurrence, ses propriétés seront souvent prouvées par récurrence.

Exemple 21 :

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$ est bornée.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ est bornée.

Exemple 22 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{n}{n^2+n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que (u_n) est bornée.

2. Montrer que la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{3}$.

Exercice 23 : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$. Montrer que la suite (a_n) est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq a_n \leq 1$.

Exemple 24 : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n^2$ est-elle majorée ? Minorée ?

2.2 Sens de variations des suites

Définition 25 (Variations d'une suite)

Une suite réelle est dite :	si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
croissante	$u_{n+1} \geq u_n$
décroissante	$u_{n+1} \leq u_n$
strictement croissante	$u_{n+1} > u_n$
strictement décroissante	$u_{n+1} < u_n$
constante	$u_{n+1} = u_n$

Comme pour les fonctions, on parle de suite *monotone* si elle est soit croissante soit décroissante.
Une suite *constante* équivaut à : il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = c$.

Exemple 26 : Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$.

***Remarque* 27 :** Une suite peut n'être ni croissante, ni décroissante comme par exemple la suite de terme général $u_n = (-1)^n$.

Définition 28 (A partir d'un certain rang)

On dit qu'une suite vérifie une propriété $\mathcal{P}$, **à partir d'un certain rang** lorsqu'il existe un entier n_0 tel que la propriété $\mathcal{P}$ soit vraie pour tous les termes u_n vérifiant $n \geq n_0$.

***Remarque* 29 :**

- ✔ Il arrive qu'une suite soit monotone seulement à partir d'un certain rang. En pratique, cette propriété nous suffit, parce que nous nous intéresserons (presque) toujours au comportement de la suite *à l'infini* (c'est-à-dire pour n grand).
- ✔ On dit qu'une suite (u_n) est **stationnaire** lorsqu'elle est constante à partir d'un certain rang, i.e. il existe $c \in \mathbb{R}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n = c$.

2.3 Étude des variations d'une suite en pratique

Il existe plusieurs méthodes pour étudier le sens de variations d'une suite. Il faudra choisir la plus adaptée en fonction des suites.

a. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Méthode 30 (Étude du signe de $u_{n+1} - u_n$)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on calcule $u_{n+1} - u_n$ et on étudie le **signe** du résultat.

- ✔ Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors (u_n) est croissante.
- ✔ Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors (u_n) est décroissante.

Exemple 31 : Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants.

1. $u_0 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n^2$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n - n^2$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{3}{2k+5}$.

b. Comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

Méthode 32 (Étude des variations d'une suite à termes strictement positifs)

On suppose ici que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on compare le résultat à 1.

- ✔ Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors (u_n) est croissante.
- ✔ Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors (u_n) est décroissante.

***Remarque* 33 :** Cette méthode est surtout utilisée pour des suites définies par des produits, des puissances, quantités qui se simplifient mieux par quotient que par différence.

Exemple 34 : Étudier les variations de la suite (u_n) dans les cas suivants.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{2^n}{n}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n!5^{n+1}}{2^n}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

c. Cas où $u_n = f(n)$ (formule explicite)

Rappel . Attention, ne pas confondre $u_n = f(n)$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Méthode 35

Dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la restriction d'une fonction f sur $\mathbb{N}$, on peut étudier la fonction f sur $[0,+\infty[$.

- ✔ Si f est croissante sur $[0,+\infty[$, alors (u_n) est croissante.
- ✔ Si f est décroissante sur $[0,+\infty[$, alors (u_n) est décroissante.

***Remarque* 36 :** Cette méthode est intéressante lorsque les variations de la fonction associée sont simples à déterminer.

Exemple 37 : Étudier les variations de la suite (u_n) dans les cas suivants.

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n+3}$.

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{\ln(n+2)}$.

d. Cas où $u_{n+1} = f(u_n)$ et f croissante (relation de récurrence)

Méthode 38

On suppose ici que f est une fonction croissante sur un intervalle I.

1. On commence par montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n \in I$ (par exemple, par récurrence).
2. On calcule u_0 et u_1.
3. (a) Si $u_1 \geq u_0$, alors on montre par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}\geq u_n$ et on conclut que (u_n) est croissante.
   (b) Si $u_1 \leq u_0$, alors on montre par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}\leq u_n$ et on conclut que (u_n) est décroissante.

Exemple 39 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$

et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Dresser le tableau de variations de f.

2. Déterminer u_0 et u_1.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

4. Montrer que (u_n) est décroissante.

Exemple 40 : Soit f la fonction définie sur $[-6, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+6}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Dresser le tableau de variations de f.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 0$.

3. Étudier les variations de (u_n).

Exercice 41 : On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 10$ et $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 6}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier les variations de (v_n).

3. Programmation en Python

Méthode 42 (Programmer en Python le calcul du terme u_n d'une suite)

Un exercice classique est de calculer le terme u_n d'une suite donnée. Dans ce cas, on commence par se poser la question du calcul mathématique d'un terme de la suite. Par exemple si je veux calculer u_{10} :

- ✔ Soit j'applique une formule et j'obtiens directement le résultat : en Python je saisis la formule directement
- ✔ Soit j'ai besoin de calculer les termes u_0 puis u_1 puis u_2 ... : en Python j'aurai besoin d'utiliser une boucle.

Exemple 43 : Écrire un programme Python qui demande à l'utilisateur de donner un entier n puis calcule la valeur de u_n dans les cas suivants.

1. $u_n = 2+3^n$ pour $n \in \mathbb{N}$
2. $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 5+\sqrt{u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$

```
n = int(input('donner le rang n : '))
u = 2 + 3**n
print('u_n vaut' , u)
```

```
n = int(input('donner le rang n : '))
u = 5
for i in range (n) :
    u = 5 + u**(1/2)
print('u_n vaut' , u)
```

Exemple 44 : Écrire un Programme Python qui demande à l'utilisateur de donner un entier n puis calcule la valeur de u_n dans les cas suivants.

1. $u_n = \dfrac{1-2n}{2+3n}$ pour $n \in \mathbb{N}$
2. $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{1-2u_n}{2+3u_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$

TD

1. Montrer qu'une suite est bien définie et conjecturer

☼ **Exercice 1 :** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2(u_n + 2^n)$. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n = n2^n$.

☼ **Exercice 2 :** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{3u_n + 5}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 0$.
2. Montrer que pour tout n, $u_n = \dfrac{5}{3n+5}$.

☼ **Exercice 3 :** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5}$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, u_n existe et $u_n \geq -\dfrac{4}{5}$.

☁ **Exercice 4 :** Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} a_n$. Déterminer a_n en fonction de n. (On pourra conjecturer la formule et la démontrer par récurrence.)

2. Représentation graphique des suites

☼ **Exercice 5 :**

1. Soit (w_n) la suite définie par $w_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n^2 - 1$. Déterminer graphiquement w_1 et w_2.
2. Même question avec $w_0 = 1{,}5$.
3. Même question avec $w_0 = 0{,}5$.

3. Montrer qu'une suite est bornée

☼ **Exercice 6 :** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 3]$.

☼ **Exercice 7 :** Soit a un nombre réel. Soit u la suite numérique définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a^n$. A quelles conditions sur a la suite u est-elle bornée ?

☁ **Exercice 8 :** Pour tout $n \geq 1$, soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.
2. En déduire que (u_n) est majorée par 2 et minorée par 1.

4. Étudier le sens de variations d'une suite

Exercice 9 (Variations) **:** Déterminer le sens de variations des suites (u_n) suivantes.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n}$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n+2}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{3^n}{n}$
4. $\forall n \geq 1,\ u_n = \dfrac{n^n}{n!}$
5. $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$
6. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{u_n}$

☼ **Exercice 10** (Récurrence) **:** Montrer par récurrence que la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 3}{u_n + 3}$ est constante.

☼ **Exercice 11** (Suite définie par une fonction) **:** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On considère la fonction f définie sur $]-2, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$.

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]-2, +\infty[$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leq u_n \leq 2$.
3. Calculer u_1. En utilisant les questions précédentes, déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

5. En autonomie

🏠 ☼ **Exercice 12** (Montrer que (u_n) est bien définie) **:** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$. Montrer que (u_n) est bien définie.

🏠 ☼ **Exercice 13** (Suite bornée) **:** Soit (u_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}$. Montrer que (u_n) est bornée.

🏠 ☼ **Exercice 14** (Variations) **:** Déterminer le sens de variations des suites (u_n) suivantes.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = |4 - n|$
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} - n$
4. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$
5. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \ln(1 + |u_n|)$

6. Approfondissement

☼ **Exercice 15** (Conjecturer et prouver) **:**

1. Calculer les premiers termes de la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$.
   Conjecturer ensuite une formule explicite et la démontrer par récurrence.
2. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n - 11$.
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = an^2 + bn + c$, où a, b et c sont trois réels à préciser.

☼ **Exercice 16** (Suites non usuelles) **:** Calculer le terme général des suites réelles suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{n+2} u_n \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1 \in \mathbb{R} \\ \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{2^n}} \end{cases}$$

🏠

☼ **Exercice 17** (Suite définie par une fonction) **:** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{5}{2u_n}$.

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[2,3]$ par $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{2x}$, et montrer que si $x \in [2,3]$ alors $f(x) \in [2,3]$.
2. Montrer ensuite par récurrence que (u_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 3$.

☼ **Exercice 18** (Python) **:** Écrire un programme Python qui demande à l'utilisateur de saisir un entier n puis calcule la valeur de u_n, où la suite (u_n) est définie par

1. $u_n = \dfrac{1}{n+1}$
2. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 3u_n^2 - 2u_n$
3. $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 5}{u_n}$
4. $u_n = \dfrac{n-5}{n^2}$
5. $u_0 = 3$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = 3u_n - u_{n+1}^2$
6. $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n + n + 2$
7. $u_5 = 8$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$

7. Type DS ou concours

Exercice 19 (Suite homographique) **:** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{2 + u_n}$.

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leq u_n < 1$. Que peut-on en déduire ?
2. En déduire les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$. Justifier que (v_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{3} v_n$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k}$ et calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$ et en déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 20 (EDHEC 2010) **:** Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 2$.
   (b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).
3. (a) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leq x$.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.
4. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $[2, e^2]$.
   Prérequis pour cette question : connaître le théorème de limite monotone.

Bilan

1. Méthodes à retenir

✔ **Montrer qu'une suite est bien définie** Si l'on a une suite (u_n) définie à l'aide d'une formule de récurrence, il faut se demander à quelle condition sur u_n le terme u_{n+1} peut être calculé : pour des fractions, le dénominateur doit être non nul, pour des racines carrées, le terme auquel s'applique la racine doit être positif, etc. On utilise souvent un raisonnement par récurrence.

✔ **Montrer qu'une suite est majorée ou minorée** Il existe plusieurs méthodes à tester :

- On peut essayer de le montrer directement. Par exemple, on est souvent dans le cas où les suites sont positives et donc minorées par 0. Dans les cas plus compliqués, on pourra enchaîner des inégalités jusqu'à arriver à une constante.
- Pour montrer une inégalité du type $u_n \leq a$, on peut se ramener à l'inégalité $u_n - a \leq 0$ ou $a - u_n \geq 0$.
- On peut démontrer des inégalités par récurrence, en particulier si les bornes sont données.

Pour rappel, un majorant et un minorant doivent être indépendants de n, ce sont des constantes.

✔ **Montrer qu'une suite est bornée** Pour montrer qu'une suite (u_n) est bornée, on a deux solutions :

- Montrer que (u_n) est majorée et minorée.
- Montrer que la suite $(|u_n|)$ est majorée. Cette piste est souvent utilisée lorsque (u_n) n'est pas de signe constant (par exemple, en présence de $(-1)^n$).

Dans les deux cas, on est ramené à la méthode précédente.

✔ **Étudier les variations d'une suite** Il y a 4 méthodes à retenir. Il arrive bien sûr qu'on puisse appliquer plusieurs de ces méthodes.

- **Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$** Méthode générale, la plus classique.
  On calcule $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on étudie le signe du résultat.
- **Comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1** A utiliser si le terme général de la suite est un produit ou un quotient.
  On suppose ici que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. On calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on compare le résultat à 1.
- **Cas où $u_n = f(n)$** Dans ce cas, les variations de la suite et de la fonction sont les mêmes. Ce n'est pas la méthode la plus utilisée mais c'est efficace si vous avez déjà étudié les variations de f au préalable.
- **Cas où $u_{n+1} = f(u_n)$ et f croissante**
  On suppose ici que f est une fonction croissante sur un intervalle I.
  i. On commence par montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ (par exemple, par récurrence).
  ii. On calcule u_0 et u_1.
  iii. A. Si $u_1 \geq u_0$, alors on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ et on conclut que (u_n) est croissante.
  B. Si $u_1 \leq u_0$, alors on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$ et on conclut que (u_n) est décroissante.

2. Erreurs classiques à éviter

- ✔ Pour définir une suite par récurrence, il faut obligatoirement donner l'un des termes de la suite (c'est généralement le premier). La relation de récurrence ne suffit pas pour la définir même si pour certaines suites, elle suffit à déterminer les variations.
- ✔ Pour étudier les variations d'une suite, on ne peut pas se contenter de le vérifier sur les premiers termes. Autrement dit, vérifier que $u_0 \leq u_1$ ou $u_0 \geq u_1$ ne suffit pas. Cela vous permet seulement de faire une conjecture.
- ✔ Ne pas mélanger les cas $u_n = f(n)$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Dans le premier cas, la suite et la fonction ont les mêmes variations, dans le deuxième cas, ce n'est pas toujours vrai (la suite peut ne pas être monotone même si la fonction l'est et les variations de la suite peuvent dépendre du premier terme.)
- ✔ Ne pas oublier de vérifier et d'écrire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ pour utiliser la comparaison de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
- ✔ En règle générale, penser aux quantificateurs quand il y en a besoin. Quand on étudie les variations et qu'on calcule $u_{n+1} - u_n$, c'est pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$ généralement). Il faut donc l'écrire.

