CHAPITRE 6

GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

1. Montrer qu'une suite est bien définie et conjecturer 1
2. Représentation graphique des suites 3
3. Montrer qu'une suite est bornée 4
4. Étudier le sens de variations d'une suite 6
5. En autonomie 8
6. Approfondissement 9

1. Montrer qu'une suite est bien définie et conjecturer

☼ **Exercice 1 :** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2(u_n + 2^n)$. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n = n2^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: $u_n = n2^n$.

Initialisation. Pour $n = 0$ on a
$u_0 = 0$ et $0 \times 2^0 = 0$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2(u_n + 2^n) \quad \text{(définition de } (u_n)\text{)} \\ &= 2(n2^n + 2^n) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 2 \times 2^n(n+1) \\ &= 2^{n+1}(n+1) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence, on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

☼ **Exercice 2 :** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{3u_n+5}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 0$.
2. Montrer que pour tout n, $u_n = \dfrac{5}{3n+5}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: u_n est bien défini et $u_n \geq 0$.
   Initialisation. Pour $n = 0$ on a
   $u_0 = 1$ est bien défini et positif.
   Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   On a
   $$u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n+5} \quad \text{(définition de } (u_n)\text{)}$$
   Le dénominateur est non nul car $u_n \geq 0$ par hypothèse de récurrence. Donc u_{n+1} est bien défini.
   Par ailleurs, il s'agit d'un quotient de deux nombres positifs (en utilisant l'hypothèse de récurrence $u_n \geq 0$, donc u_{n+1} est positif. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Par principe de récurrence, on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: $u_n = \dfrac{5}{3n+5}$.
   Initialisation. Pour $n = 0$ on a
   $u_0 = 1$ et $\dfrac{5}{3\times 0+5} = \dfrac{5}{5} = 0$.
   Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   On a
   $$\begin{aligned}
   u_{n+1} &= \frac{5u_n}{3u_n+5} && \text{(définition de } (u_n)\text{)}\\
   &= \frac{5\frac{5}{3n+5}}{3\frac{5}{3n+5}+5} && \text{par hypothèse de récurrence}\\
   &= \frac{\frac{25}{3n+5}}{\frac{15+5(3n+5)}{3n+5}}\\
   &= \frac{25}{15+15n+25}\\
   &= \frac{5}{3n+8}\\
   &= \frac{5}{3(n+1)+5}
   \end{aligned}$$
   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Par principe de récurrence, on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

☼ **Exercice 3 :** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{4u_n+5}$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, u_n existe et $u_n \geq -\dfrac{4}{5}$.

Ébauche de démonstration.

On définit $\mathcal{P}(n)$: u_n est bien définie et $u_n \geq -\dfrac{4}{5}$

Initialisation. $u_0 = -1$ bien défini et $-1 \geq -\dfrac{4}{5}$.

Hérédité. $u_n \geq -\dfrac{4}{5} \Longrightarrow 4u_n + 5 \geq 0 \Longrightarrow u_{n+1}$ est bien définie.

De plus, $4u_n + 5 \geq 0 \Longrightarrow u_{n+1} \geq 0 \Longrightarrow u_{n+1} \geq -\dfrac{4}{5}$.

Exercice 4 : Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} a_n$. Déterminer a_n en fonction de n. (On pourra conjecturer la formule et la démontrer par récurrence.)

On calcule les premiers termes à l'aide de la formule de récurrence :
$a_0 = 1$
$a_1 = \dfrac{1}{0+1} \times a_0 = 1$
$a_2 = \dfrac{1}{1+1} \times a_1 = \dfrac{1}{2} \times 1$
$a_3 = \dfrac{1}{2+1} \times a_2 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times 1$
On remarque que pour $n \in \{0;1;2;3\}$, on a $a_n = \dfrac{1}{n!}$. On va montrer par récurrence que cette formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: $a_n = \dfrac{1}{n!}$.

Initialisation. Le cas $n = 0$ a été traité ci-dessus (on sait que $0! = 1$ par convention, voir chapitre 4.)

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{n+1} a_n && \text{par définition de la suite} \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{1}{n!} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{1}{(n+1)n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence, on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Représentation graphique des suites

Exercice 5 :

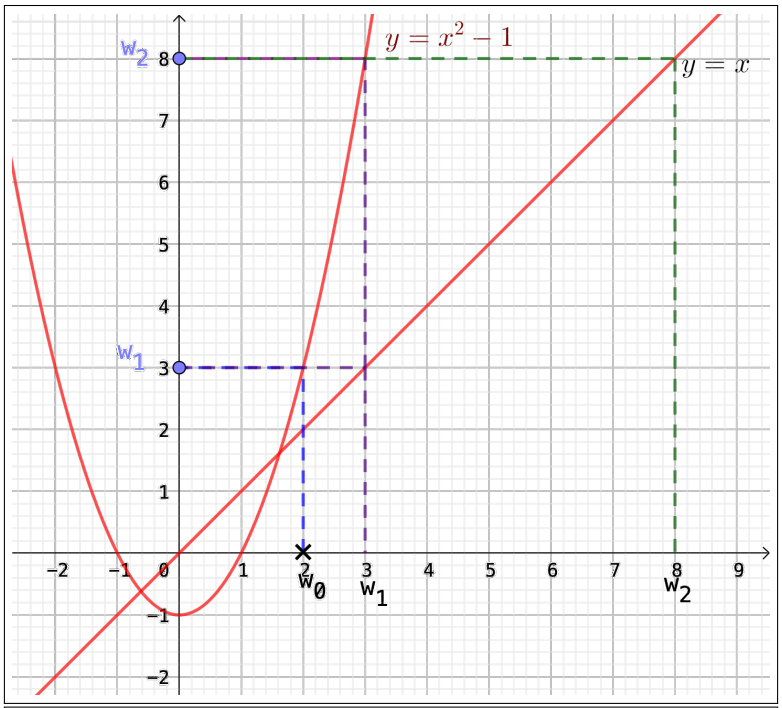
1. Soit (w_n) la suite définie par $w_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n^2 - 1$. Déterminer graphiquement

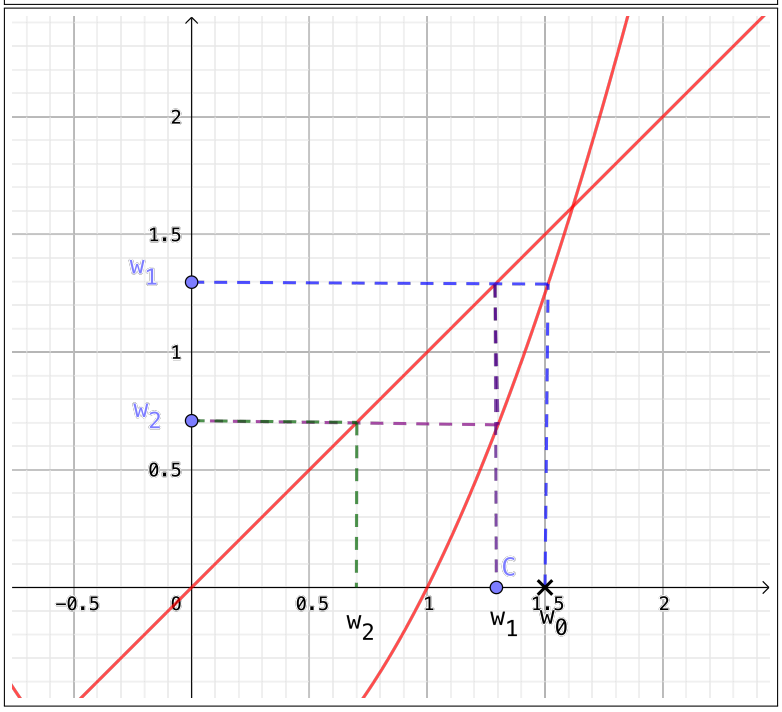
w_1 et w_2.

2. Même question avec $w_0 = 1{,}5$.
3. Même question avec $w_0 = 0{,}5$.

On commence à tracer la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2 - 1$. On place ensuite w_0 sur l'axe des abscisses puis on construit successivement w_1 et w_2 en s'aidant de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = x$ (voir figures ci-dessous).

1. On trouve $w_1 \approx 3$ et $w_2 \approx 8$. On peut vérifier par le calcul que ces valeurs sont exactes.
2. On trouve $w_1 \approx 1{,}3$ et $w_2 \approx 0{,}7$. Un calcul donnera $w_1 = 1{,}5^2 - 1 = 1{,}25$ puis $w_2 = 1{,}25^2 - 1 = 0{,}5625$





3. Montrer qu'une suite est bornée

☼ **Exercice 6 :** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,3]$.

On montre par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \quad u_n \text{ est bien définie et } 0 \leq u_n \leq 3$$

est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

☼ **Exercice 7 :** Soit a un nombre réel. Soit u la suite numérique définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a^n$. A quelles conditions sur a la suite u est-elle bornée ?

On montre que (u_n) est bornée ssi $|a| \leq 1$.

Si $|a| \leq 1$, on a $|u_n| = |a|^n \leq 1$ donc (u_n) est bornée.

Si $|a| > 1$, on utilise la définition d'une suite non bornée pour montrer que u_n dépasse n'importe quelle borne M fixée.

☼ **Exercice 8 :** Pour tout $n \geq 1$, soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
2. En déduire que (u_n) est majorée par 2 et minorée par 1.

1. Soit $k \geq 2$. On a
$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)}.$$
On montre que $\frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k^2}$
Donc $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
2. On en déduit que pour $k \geq 2$,
$$\begin{aligned} u_n &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{n} \text{par somme télescopique} \\ &\leq 2 \end{aligned}$$
De plus, $u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \geq 1$ car tous les termes de la somme sont positifs.
Il reste à vérifier que cet encadrement reste vérifié pour $n = 1$. On a $u_1 = 1$ qui est bien compris entre 1 et 2.
On en déduit que (u_n) est minorée par 1 et majorée par 2.

4. Étudier le sens de variations d'une suite

Exercice 9 (Variations) **:** Déterminer le sens de variations des suites (u_n) suivantes.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n}$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n+2}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{3^n}{n}$
4. $\forall n \geq 1,\ u_n = \dfrac{n^n}{n!}$
5. $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + e^{u_n}$
6. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{u_n}$

Ébauche de démonstration.

1. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n}{n+1} < 1$ donc strictement décroissante.
2. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\dfrac{n+3}{n+2}} > 1$ donc strictement croissante.
3. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3^{n+1}}{n+1} \times \dfrac{n}{3^n} = \dfrac{3n}{n+1} > 1$ donc strictement croissante.
   En effet on a $2n > 1 \Rightarrow 3n > n+1 \rightarrow \dfrac{3n}{n+1} > 1$
4. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{n+1}{n+1}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n > 1$ donc strictement croissante.
5. $u_{n+1} - u_n = e^{u_n} > 0$ donc strictement croissante.
6. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e^{u_n} \geq 1$ car $u_n \geq 0$ (récurrence immédiate), donc croissante.

☼ **Exercice 10** (Récurrence) **:** Montrer par récurrence que la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 3}{u_n + 3}$ est constante.

On calcule $u_0 = 3$, on en déduit que si la suite (u_n) est constante, c'est forcément que chaque terme est égal à 3. Il reste à le prouver rigoureusement.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 3$

Initialisation. $u_0 = 3$ par définition, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie et on montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{5u_n + 3}{u_n + 3} \text{ par définition de} u_n \\ &= \frac{5 \times 3 + 3}{3 + 3} \\ &= \frac{18}{6} \\ &= 3 \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3$, donc la suite (u_n) est constante.

☼ **Exercice 11** (Suite définie par une fonction) **:** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On considère la fonction f définie sur $]-2,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$.

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]-2,+\infty[$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leq u_n \leq 2$.
3. Calculer u_1. En utilisant les questions précédentes, déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

1. Pour tout $x \in]-2,+\infty[$, on a
   $f'(x) = \dfrac{2(x+2)-(2x+3)}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{(x+2)^2}$.
   Comme $(x+2)^2 > 0$ sur $]-2,+\infty[$, on a $f'(x) > 0$.
   On obtient le tableau de variations suivant :

x	-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: $\quad 0 \leq u_n \leq 2$.
   Initialisation. On a $u_0 = 0$.
   Donc on a bien $0 \leq u_0 \leq 2$.
   Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq 2$. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   On a par hypothèse de récurrence $0 \leq u_n \leq 2$. En particulier $u_n \in D_f$ donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini.
   Comme f est croissante sur $]-2,+\infty[$, on obtient $f(0) \leq f(u_n) \leq f(2)$.
   Or $f(0) = \dfrac{3}{2} > 0$ et $f(2) = \dfrac{7}{4} < 2$
   On obtient donc $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.
   Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.
   Conclusion. Par principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 2.}$
3. On sait que $u_0 = 0$. De plus, $u_1 = \dfrac{2u_0+3}{u_0+2} = \dfrac{3}{2}$.
   Ainsi, $u_1 > u_0$.
   On va montrer que la suite (u_n) est croissante en raisonnant par récurrence.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons
   $$\mathcal{P}(n) : \quad u_{n+1} > u_n.$$

Initialisation. On vient de voir que $u_1 > u_0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On a $u_{n+1} > u_n$ par hypothèse de récurrence.
Donc $u_{n+2} = f(u_{n+1}) > f(u_n) = u_{n+1}$ par stricte croissance de f sur D_f
Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} > u_n$.
La suite (u_n) est donc **strictement croissante**.

5. En autonomie

Exercice 12 (Montrer que (u_n) est bien définie) **:** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$. Montrer que (u_n) est bien définie.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: u_n est bien défini et $u_n > 0$.

Initialisation. Pour $n = 0$ on a
$u_0 = 2$ est bien défini et strictement positif.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On a $u_n > 0$ par hypothèse de récurrence, donc $1 + u_n > 1$. On en déduit que u_{n+1} est bien défini.
De plus par croissance de la fonction ln, on a
$\ln(1+u_n) > \ln(1)$. Ainsi, $u_{n+1} > 0$.
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence, on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13 (Suite bornée) **:** Soit (u_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}$.
Montrer que (u_n) est bornée.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
-1 \leq (-1)^{n-1} \leq 1 &\Longrightarrow -\frac{1}{n+1} \leq \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{en divisant par } n+1 > 0 \\
&\Longrightarrow -1 \leq \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} \leq 1 \quad \text{car } -1 \leq \frac{-1}{n+1}, \text{ et on majore avec la même méthode} \\
&\Longrightarrow -2 \leq (-1)^n + \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} \leq 2 \quad \text{en additionnant terme à terme} \\
&\text{avec l'encadrement } -1 \leq (-1)^n \leq 1 \\
&\Longrightarrow -2 \leq u_n \leq 2
\end{aligned}$$

On en déduit que (u_n) est bornée.

Autre méthode : en utilisant les valeurs absolues.

$$|u_n| = \left|(-1)^n + \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\right| \leq |(-1)^n| + \frac{|(-1)^{n-1}|}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \leq 2$$

Exercice 14 (Variations) **:** Déterminer le sens de variations des suites (u_n) suivantes.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = |4-n|$
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} - n$
4. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$
5. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \ln(1+|u_n|)$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a
   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(n+1)^1+1}{n+1} - \dfrac{n^2+1}{n} = \dfrac{n^2+n-1}{n(n+1)}$
   On obtient un quotient de nombres positifs (numérateur positif car $n \geq 1$), donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
   Donc la suite (u_n) est croissante.
2. On remarque que :
   pour $n \leq 4$ alors $4-n \geq 0$ donc $u_n = |4-n| = 4-n$
   pour $n \geq 4$ alors $4-n \leq 0$ donc $u_n = |4-n| = -(4-n) = n-4$.
   On reconnait les expressions de deux fonctions affines dont l'une est décroissante et l'autre croissante. Il semble donc que (u_n) ne soit ni croissante, ni décroissante.
   Il reste à le prouver rigoureusement à l'aide de contre-exemples.
   On détermine $u_0 = |4-0| = 4$; $u_1 = |4-1| = 3$ et $u_{10} = |4-10| = 6$.
   Ainsi $u_0 \geq u_1$ et $u_1 \leq u_{10}$.
   La suite (u_n) n'est donc ni croissante, ni décroissante.
   Autre solution. On peut aussi utiliser que pour $n \geq 4$ on a $u_n = n-4$. On reconnait la forme $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x-4$ qui est une fonction strictement croissante.
   On en déduit donc que (u_n) est strictement croissante à partir du rang 4.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a
   $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^k} - (n+1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} + n = \frac{1}{2^{n+1}} - 1 \leq 0$
   Donc la suite (u_n) est décroissante.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$
   Donc la suite (u_n) est décroissante.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a
   $u_{n+1} - u_n = \ln(1+|u_n|) \geq 0$ car $1+|u_n| \geq 1$
   Donc la suite (u_n) est croissante.

6. Approfondissement

Exercice 15 (Conjecturer et prouver) **:**

1. Calculer les premiers termes de la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$.
   Conjecturer ensuite une formule explicite et la démontrer par récurrence.
2. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n - 11$.
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = an^2 + bn + c$, où a, b et c sont trois réels à préciser.

1. On calcule les premiers termes :

$$u_0 = 3 = \sqrt{9} \quad u_1 = \sqrt{10} \quad u_2 = \sqrt{11} \quad u_3 = \sqrt{12}$$

   Ces premiers termes vérifient l'égalité $u_n = \sqrt{9+n}$. Nous allons montrer que cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: $u_n = \sqrt{9+n}$.
   Initialisation. Pour $n = 0$ on a $u_0 = 3$ et $\sqrt{9+0} = 3$.
   Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et on montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{1+u_n^2} \\ &= \sqrt{1+(\sqrt{9+n})^2} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \sqrt{1+9+n} \\ &= \sqrt{9+(1+n)} \end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Par principe de récurrence, on en déduit que $u_n = \sqrt{9+n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Ici l'énoncé nous donne une indication sur le terme général de (u_n). On va donc d'abord déterminer les coefficients a, b et c à partir des premières valeurs de la suite. On montrera ensuite par récurrence que la formule obtenue est vraie pour tout n.
   On calcule les premiers termes :

$$u_0 = 0 \quad u_1 = -11 \quad u_2 = -20$$

   On a donc

$$\begin{aligned} u_n = an^2+bn+c &\iff \begin{cases} u_0 &= a\times 0^2 + b\times 0 + c \\ u_1 &= a\times 1^2 + b\times 1 + c \\ u_2 &= a\times 2^2 + b\times 2 + c \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 0 &= c \\ -11 &= a+b+c \\ -20 &= 4a+2b+c \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} c &= 0 \\ b &= -12 \\ a &= 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Où les valeurs de a, b et c sont obtenues en résolvant le système linéaire.
On conjecture donc que $u_n = n^2 - 12n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: $u_n = n^2 - 12n$.
Initialisation. Pour $n = 0$ on a $u_0 = 0$ et $0^2 - 12 \times 0 = 0$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et on montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 2n - 11 \\ &= n^2 - 12n + 2n - 11 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= n^2 - 10n - 11 \\ &= (n+1)^2 - 12(n+1) \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par principe de récurrence, on en déduit que $u_n = n^2 - 12n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16 (Suites non usuelles) **:** Calculer le terme général des suites réelles suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{n+2} u_n \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1 \in \mathbb{R} \\ \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{2^n}} \end{cases}$$

Ici on prend à chaque fois le temps de calculer quelques premiers termes pour conjecturer une formule. Mieux vaut laisser tous les calculs dans l'expression, sans calculer les produits, au risque de perdre la logique utilisée pour construire cette suite.
C'est l'étape la plus délicate : gardez bien en tête les calculs effectués à chaque étape pour comprendre comment est créée cette suite.

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{n+2} u_n \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$.

Initialisation. Pour $n = 0$ on a $u_0 = 1$ et $\dfrac{2^0}{0+1} = 1$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et on montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2n+2}{n+1} u_n \\ &= \frac{2n+2}{n+2} \frac{2^n}{n+1} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{2^{n+1}}{n+2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence, on en déduit que $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} u_1 \in \mathbb{R} \\ \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} \end{cases}$$

Pour $n \geq 2$, on pose $\mathcal{P}(n)$: $u_n = \dfrac{n}{2} u_1$.

Initialisation. Pour $n = 2$ on a $u_2 = u_1$ et $\dfrac{2}{2} u_1 = u_1$.
Donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 2$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et on montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} \\ &= \frac{u_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k}{k} \\ &= \frac{u_n}{n} + u_n = \frac{n+1}{n} u_n \\ &= \frac{n+1}{n} \frac{n}{2} \quad \text{par HR} \\ &= \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence, on en déduit que $u_n = \dfrac{n}{2} u_1$ pour tout $n \geq 2$.

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \geq 1, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{2^n}} \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{P}(n)$: $u_n = \sqrt{1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}}$.

Initialisation. Pour $n = 1$ on a $u_1 = 1$ et $\sqrt{1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{2^k}} = 1$.

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et on montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}} \\ &= \sqrt{1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^n}} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \sqrt{1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence, on en déduit que $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Par calcul de somme, on peut simplifier ce terme général :

$u_n = \sqrt{1 + \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{2^k}} = \sqrt{3 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}$, mais cette expression est plus difficile à manipuler pour l'étape d'hérédité.

Exercice 17 (Suite définie par une fonction) **:** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{5}{2u_n}$.

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[2,3]$ par $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{2x}$, et montrer que si $x \in [2,3]$ alors $f(x) \in [2,3]$.
2. Montrer ensuite par récurrence que (u_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 3$.

1. On obtient $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2x^2}$. Une étude de son signe donne le tableau de variations suivant.

x	2		$\sqrt{5}$		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	$\sqrt{5}$	$\nearrow$	$\frac{14}{6}$

   On remarque que $f(\sqrt{5}) = \sqrt{5} > 2$; $f(2) = \dfrac{9}{4} < 3$ et $f(3) = \dfrac{14}{6} < 3$.
   Ainsi, $f(x) \in [2;3]$.
2. On utilise une récurrence en utilisant pour l'hérédité le fait que $u_{n+1} = f(u_n)$, donc $u_{n+1} \in [2;3]$ d'après le résultat précédent.

Exercice 18 (Python) **:** Écrire un programme Python qui demande à l'utilisateur de saisir un entier n puis calcule la valeur de u_n, où la suite (u_n) est définie par

1. $u_n = \dfrac{1}{n+1}$
2. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 3u_n^2 - 2u_n$
3. $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 5}{u_n}$
4. $u_n = \dfrac{n-5}{n^2}$
5. $u_0 = 3$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = 3u_n - u_{n+1}^2$
6. $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n + n + 2$
7. $u_5 = 8$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$

1. On utilise directement la formule donnant u_n.

```
n = int(input('Donner le rang n : '))
u = 1 / (n + 1)
print('u_n vaut', u)
```

2. On connaît u_0. Pour obtenir u_n, on applique n fois la relation de récurrence.

```
n = int(input('Donner le rang n : '))
u = 3
for k in range(n):
    u = 3*u**2 - 2*u
print('u_n vaut', u)
```

3. La suite est définie à partir de u_1. On suppose donc que l'utilisateur saisit un entier $n \geq 1$.

```
n = int(input('Donner un rang n >= 1 : '))
u = 2
for k in range(1, n):
    u = (2*u - 5) / u
print('u_n vaut', u)
```

4. On utilise directement la formule donnant u_n. Celle-ci est définie pour $n \geq 1$.

```
n = int(input('Donner un rang n >= 1 : '))
u = (n - 5) / n**2
print('u_n vaut', u)
```

5. Ici la relation fait intervenir deux termes précédents. On utilise une variable auxiliaire pour calculer u_{k+2}.

```
n = int(input('Donner le rang n : '))

x = 3  # u_0
y = 2  # u_1

for k in range(n-1):
    z = 3*x - y**2   # calcul de u_(k+2)
    x = y   # mise à jour des valeurs
print('u_n vaut', z)
```

Autre solution, avec une affectation simultanée

```
n = int(input('Donner le rang n : '))

u0 = 3
u1 = 2

for k in range(n):
    u0, u1 = u1, 3*u0 - u1**2

print('u_n vaut', u0)
```

6. On connaît $u_0 = 4$. Attention : dans la relation $u_{n+1} = u_n + n + 2$, la valeur ajoutée dépend du rang n.

```
n = int(input('Donner le rang n : '))
u = 4
for k in range(n):
    u = u + k + 2
print('u_n vaut', u)
```

7. La suite est définie à partir de $u_5 = 8$. On suppose donc que l'utilisateur saisit un entier $n \geq 5$.

```
n = int(input('Donner un rang n >= 5 : '))
u = 8
for k in range(5, n):
    u = 3*u - 2
print('u_n vaut', u)
```

7. Type DS ou concours

Exercice 19 (Suite homographique) **:** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{2 + u_n}$.

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leq u_n < 1$. Que peut-on en déduire ?
2. En déduire les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$. Justifier que (v_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{3} v_n$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k}$ et calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$ et en déduire une expression de u_n en fonction de n.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : 0 \leq u_n < 1$.
   Initialisation : On a $u_0 = 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité : Soit $n \geq 0$ fixé. Montrons que si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Montrons que $0 \leq u_{n+1} < 1$.
   Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ donc $2u_n + 1 > 0$ et $2 + u_n > 0$. Donc par quotient, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{2 + u_n} > 0$.
   D'autre part, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{2u_n + 1}{2 + u_n} - \dfrac{2 + u_n}{2 + u_n} = \dfrac{u_n - 1}{2 + u_n} < 0$ car $0 < u_n < 1$ par hypothèse de récurrence.
   Donc $u_{n+1} < 1$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n < 1}$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n+1}{2+u_n} - \dfrac{u_n(u_n+2)}{u_n+2} = \dfrac{2u_n+1-u_n^2-2u_n}{u_n+2} = \dfrac{1-u_n^2}{u_n+2} \geq 0$ car d'après la question 1, $0 \leq u_n < 1$.
Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n < 1$ donc $u_n + 1 \neq 0$ donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est bien définie.}}$
De plus, comme $0 \leq u_n < 1$, $u_n - 1 < 0$ donc $u_n - 1 \neq 0$ donc $\boxed{v_n \neq 0}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \dfrac{\frac{2u_n+1}{2+u_n}-1}{\frac{2u_n+1}{2+u_n}+1} = \dfrac{\frac{2u_n+1-2-u_n}{2+u_n}}{\frac{2u_n+1+2+u_n}{2+u_n}} = \dfrac{u_n-1}{3u_n+3} = \dfrac{1}{3}\dfrac{u_n-1}{u_n+1} = \dfrac{1}{3}v_n$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{v_n}{v_0}$ par télescopage et $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
Donc $v_n = v_0\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$. Or $v_0 = \dfrac{0-1}{0+1} = -1$. Donc $\boxed{v_n = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$.

6. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+1} \iff v_n(u_n+1) = u_n - 1 \iff v_n u_n + v_n = u_n - 1 \iff v_n u_n - u_n = -v_n - 1 \iff u_n(v_n-1) = -v_n - 1 \iff u_n = \dfrac{-v_n-1}{v_n-1} = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$
Ainsi, $\boxed{u_n = \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}}$

Exercice 20 (EDHEC 2010) **:** Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 2$.
   (b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).
3. (a) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leq x$.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.
4. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $[2, e^2]$.
Prérequis pour cette question : connaître le théorème de limite monotone.

1. On a $u_0 = 1 + \dfrac{1}{2^0} = 2$ et $u_1 = \left(1+\dfrac{1}{2^0}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^1}\right) = 2 \times \dfrac{3}{2} = 3$
et $u_2 = \left(1+\dfrac{1}{2^0}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^1}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right) = 3 \times \dfrac{5}{4}$

2. (a) On a $u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = u_n + \frac{1}{2^{n+1}} u_n \geq u_n$ car $u_n \geq 0$ donc la suite est croissante et comme $u_0 = 2$
Conclusion : $\boxed{u_n \geq 2}$:

   (b) $u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ et on sait que $1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1$. Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1$
Conclusion : $\boxed{\text{la suite est croissante}}$

3. (a) Soit $g(x) = \ln(1+x) - x$.
g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$

x	-1	$-$	0	$+$	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Donc $g(x) \leq 0$
Conclusion : $\boxed{\forall x > -1, \text{ on a : } \ln(1+x) \leq x.}$
On pouvait aussi utiliser la concavité de $x \to \ln(1+x)$ dont la courbe est donc en dessous de sa tangente en 0 d'équation $y = x$

   (b) Comme produit de termes strictement positifs, $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$
Et comme $1 + \frac{1}{2^k} > 1$ alors $\ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$ et

$$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1 + \frac{1}{2^{n+1}}}{1 + \frac{1}{2}} = 2\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq 2$$

Conclusion : $\boxed{\ln(u_n) \leq 2 \text{ pour tout entier } n}$

4. On a donc $u_n \leq e^2$. et comme la suite est croissante et majorée par e^2, par limite monotone elle converge vers une limite $\ell \in [2, e^2]$