CHAPITRE 8

SOMMES DOUBLES

1. Sommes doubles sur un rectangle 2
2. Sommes doubles sur un triangle 3
2.1 Avec la diagonale 3
2.2 Sans la diagonale 4
TD 6
Bilan 7
1. Méthodes à retenir 7
2. Erreurs à éviter 7

Dans tout ce chapitre, n et p désigneront des entiers naturels non nuls.

1. Sommes doubles sur un rectangle

Définition 1 (Sommes doubles sur un rectangle)

Les sommes doubles sur un rectangle, aussi appelées sommes doubles à indices indépendants sont les sommes de la forme :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j} = a_{1,1} + a_{1,2} \cdots + a_{1,p} + a_{2,1} + \cdots + a_{2,p} + \cdots + a_{n,1} + \cdots + a_{n,p}$$

où les $a_{i,j}$ sont des réels.
On note également $\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j}$
Si les indices i et j parcourent les mêmes valeurs, on note $\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} a_{i,j} = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}$

Proposition 2 (Somme sur un rectangle)

Soient $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ des réels. On a alors

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right).$$

Exemple 3 : Calculer $A = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} (i+j)$ et $B = \sum_{1\leq i,j\leq n} i$.

Exemple 4 : Calculer $A = \sum_{0\leq i,j\leq n} 2^{2i-j}$ et $B = \sum_{1\leq i,j\leq n} ij$.

2. Sommes doubles sur un triangle

Dans cette partie, on considère les sommes doubles sur un triangle, aussi appelées sommes doubles à indices dépendants. Ce sont les sommes doubles dans lesquelles les bornes de la deuxième somme dépendent de l'indice de la première somme.

2.1 Avec la diagonale

On considère le cas $p = n$, autrement dit celui où le rectangle est un carré. On s'intéresse maintenant aux sommes doubles qui ne prennent pas en compte tous les $a_{i,j}$ du rectangle.

$$\sum_{1\leq j\leq i\leq n} a_{i,j} = a_{1,1} + a_{2,1} + a_{2,2} + a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} + \cdots + a_{i,1} + \cdots + a_{i,i} + \cdots + a_{n,1} + \cdots + a_{n,n}$$

On a donc la propriété suivante :

Proposition 5 (Sommes doubles sur un triangle inférieur avec diagonale)

Soient $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ des réels. Alors

$$\sum_{1\leq j\leq i\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}\right).$$

Exemple 6 : Calculer $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j}$.

Exemple 7 : Calculer $\sum_{i=1}^{n} i2^i$. *On pourra commencer par écrire* $i = \sum_{j=1}^{i} 1$.

2.2 Sans la diagonale

On reprend le triangle précédent auquel on enlève la diagonale. La somme double s'écrit maintenant :

$$\sum_{1\leq j<i\leq n} a_{i,j} = a_{2,1} + a_{3,1} + a_{3,2} + a_{4,1} + a_{4,2} + a_{4,3} + a_{i,1} + \cdots + a_{i,i-1} + \cdots + a_{n,1} + \cdots \cdots + a_{n,n-1}$$

On a donc la propriété suivante :

Proposition 8 (Sommes doubles sur un triangle inférieur sans diagonale)

Soient $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ des réels, alors

$$\sum_{1\leq j<i\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=2}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=j+1}^{n} a_{i,j}\right).$$

Exemple 9 : Calculer la somme suivante :

$$\sum_{1\leq j<i\leq n} j$$

TD

Exercice 1 (Sur un rectangle) **:** Calculer les sommes

1. $\sum_{1\leq i,j\leq n} 1$
2. $\sum_{1\leq i,j\leq n} (i+j)^2$
3. $\sum_{1\leq i,j\leq n} 2ij$

Exercice 2 (Avec une astuce) **:** On veut calculer la somme $\sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{i}{i+j}$

1. Justifier que $\frac{i}{i+j} = 1 - \frac{j}{i+j}$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}^*$
2. À l'aide de la formule précédente, montrer que $S = n^2 - S$
3. Conclure.

Exercice 3 (Sur un rectangle) **:**

1. Calculer $S = \sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j)$.
2. Calculer $T = \sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i,j)$.
3. En déduire la valeur de $U = \sum_{1\leq i,j\leq n} |i-j|$.

Exercice 4 (Sur un triangle) **:** Calculer les sommes

1. $\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i} 3^i \left(\frac{1}{9}\right)^j\right)$
2. $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} 2^i$
3. $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} (i+j)$
4. $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} |i-j|$

Exercice 5 (Sur un triangle) **:** Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $a_n = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij$
2. $b_n = \sum_{1\leq i<j\leq n} ij$

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 6 (Sur un triangle) **:** Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{1}{j}$
2. $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} 3^i$

Bilan

1. Méthodes à retenir

✔ **Connaître les formules qui permettent d'écrire les sommes doubles avec deux sommes simples** ou du moins savoir les retrouver.

- Pour les sommes à indices indépendants (sur les rectangles) : pas de difficultés.
- Pour les sommes à indices dépendants (sur les triangles) : on regarde bien les bornes atteintes pour chaque indice i et j. Les bornes de la première somme sont indépendante de l'indice de la somme intérieure.

✔ **Pour chaque somme, il y a deux possibilités de calcul.** Parfois, les deux seront équivalentes, parfois l'une sera préférable voire nécessaire, les calculs étant infaisables avec l'autre. Ainsi, si vous êtes bloqué, changez de méthode, la méthode employée n'est peut-être pas judicieuse. L'idée est de se ramener à des sommes usuelles que vous connaissez.

► TD : exo 3

✔ **Cas particuliers classiques**

- $\sum_{k=1}^{n} kq^k$. On transforme la somme simple en somme double grâce à l'astuce $\sum_{i=1}^{k} 1 = k$.

  ► Cours : ex 7
- $\sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i,j)$ ou $\sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j)$: il est judicieux de décomposer la somme double sur le rectangle en deux sommes doubles, l'une sur le triangle inférieur et l'autre sur le triangle supérieur, étant donné que $\max(i,j)$ et $\min(i,j)$ valent i ou j selon le triangle considéré. On ne comptera pas la diagonale deux fois.

  ► TD : exo 3

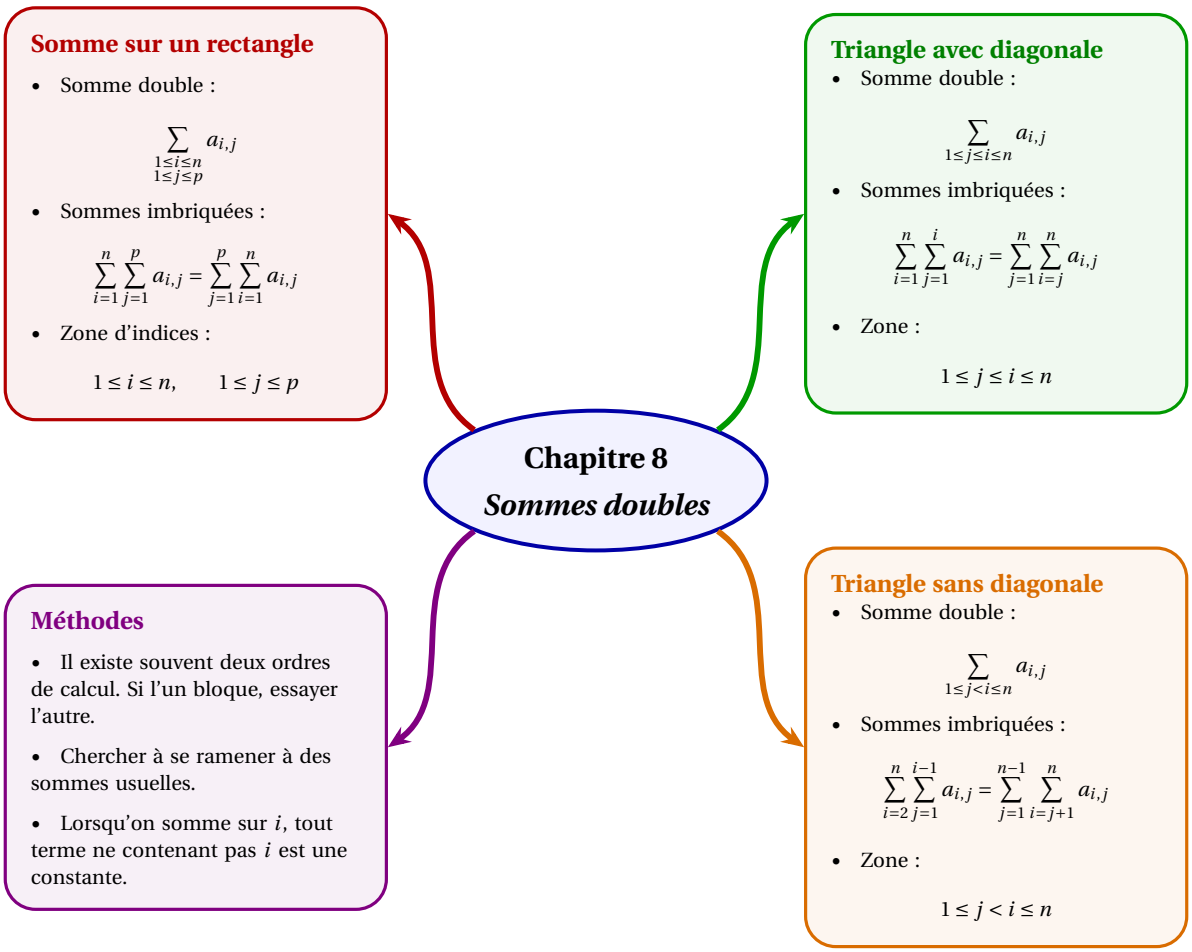
✔ **Bien connaître les sommes simples** : si ce n'est pas le cas, il faut les apprendre, sans quoi les calculs de sommes doubles ne seront pas faisables.

2. Erreurs à éviter

✔ **Bien vérifier les indices** quand on a des sommes à indices dépendants.

✔ **Faire attention aux constantes** :

- Quand vous sommez une constante, c'est le nombre de termes multiplié par la constante.
- Comment identifier les constantes ? Quand vous sommez sur i, tous les termes ne contenant pas l'indice i sont des constantes (autrement dit, j, k, n, etc... sont des constantes pour i). Pensez donc à utiliser la linéarité pour les sortir des sommes.


Somme sur un rectangle
• Somme double :
$\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} a_{i,j}$
• Sommes imbriquées :
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$
• Zone d'indices :
$1 \le i \le n, \quad 1 \le j \le p$
Triangle avec diagonale
• Somme double :
$\sum_{1\le j\le i\le n} a_{i,j}$
• Sommes imbriquées :
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}$
• Zone :
$1 \le j \le i \le n$
Chapitre 8
Sommes doubles
Méthodes
• Il existe souvent deux ordres de calcul. Si l'un bloque, essayer l'autre.
• Chercher à se ramener à des sommes usuelles.
• Lorsqu'on somme sur i, tout terme ne contenant pas i est une constante.
Triangle sans diagonale
• Somme double :
$\sum_{1\le j<i\le n} a_{i,j}$
• Sommes imbriquées :
$\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n} a_{i,j}$
• Zone :
$1 \le j < i \le n$