CHAPITRE 8

SOMMES DOUBLES

☼ **Exercice 1** (Sur un rectangle) **:** Calculer les sommes

1. $\sum_{1\leq i,j\leq n} 1$
2. $\sum_{1\leq i,j\leq n} (i+j)^2$
3. $\sum_{1\leq i,j\leq n} 2ij$

1. $\sum_{1\leq i,j\leq n} 1 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} 1\right) = \sum_{i=1}^{n} n = \boxed{n^2}$
2. $$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i,j\leq n} (i+j)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(i+j)^2\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(i^2+2ij+j^2)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} i^2 + \sum_{j=1}^{n} 2ij + \sum_{j=1}^{n} j^2\right) \quad \text{par linéarité de la somme}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(ni^2 + 2i\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \quad \text{ici on calcule la somme}\\
&\text{sur l'indice } j\text{, donc tous les } i \text{ sont considérés comme des constantes.}\\
&= \sum_{i=1}^{n} ni^2 + \sum_{i=1}^{n} 2i\frac{n(n+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{par linéarité de la somme}\\
&= n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n(n+1)\frac{n(n+1)}{2} + n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
&= \frac{n^2(n+1)}{6}(4n+2+3n+3)\\
&= \boxed{\frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i,j\leq n} 2ij &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 2ij \\ &= 2\sum_{i=1}^{n} i\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) \qquad \text{par linéarité de la somme} \\ &= 2\sum_{i=1}^{n}\left(i\frac{n(n+1)}{2}\right) \\ &= 2\frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} i \\ &= n(n+1)\frac{n(n+1)}{2} \\ &= \boxed{\frac{n^2(n+1)^2}{2}}\end{aligned}$$

Exercice 2 (Avec une astuce) **:** On veut calculer la somme $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{i}{i+j}$

1. Justifier que $\dfrac{i}{i+j} = 1 - \dfrac{j}{i+j}$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}^*$
2. À l'aide de la formule précédente, montrer que $S = n^2 - S$
3. Conclure.

1. Pour $i, j \in \mathbb{N}^*$ on a
   $1 - \dfrac{j}{j+i} = \dfrac{j+i-j}{i+j} = \dfrac{i}{i+j}$
2. $S = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{i}{i+j}$. On a :
   $S = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}\left(1 - \frac{j}{i+j}\right) = \sum_{1\leq i,j\leq n} 1 - \sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{j}{i+j} = n^2 - \sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{j}{i+j} = n^2 - S$
   Car les indices i et j ont des rôles symétriques dans cette somme.
3. On en déduit donc que
   $S = n^2 - S$, d'où $2S = n^2$. Ce qui permet de conclure

$$\boxed{S = \frac{n^2}{2}}$$

Exercice 3 (Sur un rectangle) **:**

1. Calculer $S = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i, j)$.
2. Calculer $T = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i, j)$.

3. En déduire la valeur de $U = \sum_{1\leq i,j\leq n} |i-j|$.

On se souvient que $\min(i,j) = i$ si $i \leq j$ et $\min(i,j) = j$ si $i > j$, il faut donc séparer la somme « intérieure » pour différencier ces deux cas. Même principe pour le maximum.

1.

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \min(i,j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} \min(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n} \min(i,j)\right) \quad \text{par la relation de Chasles} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2} + (n-i)i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)i - \frac{1}{2}i^2\right) \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \quad \text{après simplification}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i,j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} \max(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n} \max(i,j)\right) \quad \text{par la relation de Chasles} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{i}{2} + \frac{i^2}{2}\right) \\
&= \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \boxed{\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}}
\end{aligned}$$

3. On remarque que pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on a $|i-j| = \max(i,j) - \min(i,j)$. On a donc

$$\begin{aligned}
U &= \sum_{1\leq i,j\leq n} |i-j| \\
&= \sum_{1\leq i,j\leq n} \max(i,j) - \sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j) \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= T - S \\
&= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} \\
&= \boxed{\frac{n(n+1)(n-1)}{3}}
\end{aligned}$$

Exercice 4 (Sur un triangle) **:** Calculer les sommes

1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i} 3^i \left(\frac{1}{9}\right)^j\right)$ 2. $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} 2^i$ 3. $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} (i+j)$ 4. $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} |i-j|$

1.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} 3^i \left(\frac{1}{9}\right)^j &= \sum_{i=0}^{n}\left(3^i \sum_{j=0}^{i}\left(\frac{1}{9}\right)^j\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} 3^i \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{i+1}}{1-\frac{1}{9}} \quad \text{par somme des termes d'une suite géométrique} \\
&= \frac{9}{8}\sum_{i=0}^{n} 3^i - \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{9}\right)^i \\
&= \frac{9}{8}\frac{1-3^{n+1}}{1-3} - \frac{1}{8}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{9}{16}(3^{n+1}-1) - \frac{3}{16}(1-3^{-n-1}) \\
&= \boxed{\frac{3^{n+3}+3^{-n}-12}{16}}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i\leq j\leq n} 2^i &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} 2^i \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j} 2^i - 2^0\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1-2^{j+1}}{1-2} - 1\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(2^{j+1}-2) \\
&= \sum_{j=0}^{n} 2^{j+1} - 1 - \sum_{j=1}^{n} 2 \\
&= 2\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2} - 1\right) - 2n \\
&= \boxed{2^{n+2} - 4 - 2n}
\end{aligned}$$

Si on commence par effectuer la somme sur l'indice j, on obtient $\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)2^i$ par somme d'une constante (par rapport à l'indice j). En développant cette expression, on obtient un terme de la forme $i2^i$ pour lequel on ne connait pas de formule explicite.

3.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i\leq j\leq n} (i+j) &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}(i+j)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j(j+1)}{2} + j^2\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{3}{2}j^2 + \frac{1}{2}j\right) \\
&= \frac{3}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \boxed{\frac{n(n+1)^2}{2}}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i\leq j\leq n} |i-j| &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}|i-j|\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}(j-i)\right) \quad \text{car pour } i\leq j \text{ on a } |i-j| = j-i\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(j^2 - \frac{j(j+1)}{2}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}j^2 - \frac{1}{2}j\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \boxed{\frac{n(n+1)(n-1)}{6}}
\end{aligned}$$

Exercice 5 (Sur un triangle) **:** Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $a_n = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij$
2. $b_n = \sum_{1\leq i<j\leq n} ij$

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

1.

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} ij\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n} j\frac{j(j+1)}{2}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}j^3 + \frac{1}{2}j^2\right)\\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{8} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}\\
&= \boxed{\frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
b_n &= \sum_{1\leq i<j\leq n} ij \\
&= \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} ij\right) \\
&= \sum_{j=2}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j-1} i\right) \\
&= \sum_{j=2}^{n} j\frac{(j-1)j}{2} \\
&= \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{1}{2}j^3-\frac{1}{2}j^2\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}j^3-\frac{1}{2}j^2\right) \quad \text{en remarquant que le terme d'indice } j=1 \text{ est nul} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{8}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12} \\
&= \frac{n(n+1)(3n^2-n-2)}{24} \\
&= \boxed{\frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}}
\end{aligned}$$

Exercice 6 (Sur un triangle) **:** Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\frac{1}{j}$
2. $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} 3^i$

1.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i\leq j\leq n}\frac{1}{j} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{j}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} j\times\frac{1}{j} \quad \text{par somme d'une constante} \\
&= \sum_{j=1}^{n} 1 \\
&= \boxed{n}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i\leq j\leq n} 3^i &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} 3^i\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j} 3^i - 3^0\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1-3^{j+1}}{1-3} - 1\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{3}{2}3^j - \frac{3}{2}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{3}{2}3^j - \sum_{j=1}^{n}\frac{3}{2}\\
&= \sum_{j=0}^{n}\frac{3}{2}3^j - \frac{3}{2}3^0 - \sum_{j=1}^{n}\frac{3}{2}\\
&= \frac{3}{2}\frac{1-3^{n+1}}{1-3} - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}n\\
&= -\frac{9}{4} + \frac{3^{n+2}}{4} - \frac{3}{2}n\\
&= \boxed{\frac{3^{n+2}-6n-9}{4}}
\end{aligned}$$