
Concours Blanc 2

Exercice 3 EDHEC 2020 Math Approfondie

Dans tout l'exercice, on désigne par E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n ($n \geq 2$), on note Id l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul de E . Pour tout endomorphisme f de E , on appelle trace de f , le réel, noté $\text{Tr}(f)$, égal à la trace de n'importe quelle des matrices représentant f . On admet que l'application trace, ainsi définie, est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

Partie 1 : préliminaires

- 1) On considère un projecteur p de E , c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.
 - a) Montrer que $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$
 - b) Établir que $\text{Im}(p) = \text{Ker}(\text{Id} - p)$
 - c) Soit $B_1 = (e_1, \dots, e_k)$ une base de $\text{Ker}(p)$ et $B_2 = (f_1, \dots, f_m)$ une base de $\text{Ker}(\text{Id} - p)$, démontrer que $B = (e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_m)$ est une base de E
 - d) Ecrire la matrice de p dans la base B . En déduire que $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.
- 2) Montrer par récurrence sur k ($k \in \mathbb{N}^*$) que, si $E_1, \dots, E_k$ sont des sous-espaces vectoriels de E , alors on a l'inégalité :

$$\dim(E_1 + \dots + E_k) \leq \dim(E_1) + \dots + \dim(E_k)$$

Partie 2 : condition nécessaire et suffisante pour qu'une somme de projecteurs soit un projecteur

Soit un entier naturel k supérieur ou égal à 2. On considère des projecteurs de E , notés $p_1, p_2, \dots, p_k$, et on pose $q_k = p_1 + p_2 + \dots + p_k$.

- 3) Montrer que si, pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$, alors q_k est un projecteur.

On suppose dans toute la suite que q_k est un projecteur et on souhaite montrer que, pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$.

- 4)
 - a) Montrer que $\text{Im}(q_k)$ est inclus dans $\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)$.
 - b) Établir, grâce aux résultats de la partie 1, que $\text{rg}(q_k) = \dim(\text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k))$, puis en déduire que $\text{Im}(q_k) = \text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_k)$.
 - c) Établir finalement l'égalité :

$$\text{Im}(q_k) = \text{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(p_k)$$

- 5)
 - a) Montrer que, pour tout j de $\llbracket 1, k \rrbracket$, on a l'égalité $q_k \circ p_j = p_j$.
 - b) En déduire que, pour tout j de $\llbracket 1, k \rrbracket$, on a : $\forall x \in E, \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^k p_l(p_j(x)) = 0$.
 - c) Montrer alors que, pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$.
- 6) Conclure quant à l'objectif de cette partie.

Exercice 1 EDHEC 2020 Math appliqué

On note tB la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire.

On dit qu'une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

On considère une matrice A fixée de $M_n(\mathbb{R})$ et l'application f , qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, associe :

$$f(M) = ({}^tA)M + MA$$

2.
 - (a) Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.
 - (b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On considère les trois matrices

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
- (b) Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
4. (a) Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.
- (b) En déduire une base de $\text{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathcal{B}$.
- (c) Déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$ puis en donner une base.
5. (a) Écrire la matrice F de f dans la base $\mathcal{B}$. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1; 0\}$.
- (b) On note Id l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de $f + \text{Id}$.

Exercice 1 EDHEC 2019 appliqué

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est I .

1. (a) Déterminer $(A - I)^2$.
- (b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A .
2. On pose $A = N + I$.
- (a) Exprimer pour tout entier naturel n , la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N , puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A .
- (b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.
3. (a) Soit X un vecteur non nul tel que $AX = \lambda X$. Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur possible de λ .
4. On pose $u_1 = (f - \text{Id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.
- (a) Montrer que le rang de $f - \text{Id}$ est égal à 1.
- (b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\text{Ker}(f - \text{Id})$.
5. (a) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.
- (b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.
6. Soit la matrice

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Justifier l'inversibilité de P . On admettra pour la question 7.b. et pour la 8 que $A = PTP^{-1}$.

7. On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $M_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que, pour tout (i, j) de $\llbracket 1, 3 \rrbracket^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne qui vaut 1.
- (a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T , c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille

$$(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3}).$$

Vérifier que la dimension de E est égale à 5.

- (b) Soit N une matrice quelconque de $M_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :

$$NA = AN \iff (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP)$$

8. En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille

$$(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}).$$

Exercice 1 EDHEC ECS 2015

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)}.$$

1. Vérifier que I_n est une intégrale convergente.
2. (a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x différent de -1 et 0 , on ait :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}.$$

- (b) En déduire la valeur de I_1 .
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 , on a :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}.$$

- (b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
4. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, calculer $I_n + I_{n+1}$.
(b) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
(c) En déduire un équivalent de I_n puis donner la nature de la série de terme général I_n .
5. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose

$$J_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)^2}.$$

- (a) Montrer que J_n est une intégrale convergente.
- (b) Calculer J_0 .
6. (a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k .
(b) Déterminer alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'expression de

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k$$

en fonction de J_n .

- (c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, 0 \leq J_n \leq \frac{1}{4(n-1)}.$$

Donner la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.

- (d) En déduire que la série de terme général $(-1)^{n-1} I_n$ est convergente et donner sa somme.
7. À l'aide des questions 4.a) et 6.a), compléter les instructions Python suivantes afin qu'elles permettent le calcul de I_n et J_n , pour une valeur de n , supérieure ou égale à 2 , entrée par l'utilisateur.

```
import numpy as np

n = int(input("entrez une valeur de n superieure ou egale a 2 : "))
I = np.log(2)
J = 1/2
J = .....
for k in range(2, n + 1):
    I = .....
    J = .....
print("la valeur de I est :", I)
print("la valeur de J est :", J)
```