
DS début juin 1

CONSIGNES

Tous les feuillets doivent être identifiables et numérotés par le candidat.

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1 Ecricone Math appli 2024

Pour toute variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et pour tout entier naturel k , on pose :

$$R_X(k) = \mathbb{P}(X > k).$$

La partie II est indépendante des autres parties ; les résultats de la partie I pourront intervenir dans les parties III et IV.

Partie I

- Soit p un réel de $]0, 1[$. Dans cette question uniquement, on suppose que X suit la loi géométrique de paramètre p .
 - Calculer $R_X(k)$ pour tout entier naturel k .
 - Vérifier que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = 1 - p$.
- Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
 - Pour tout entier naturel k non nul, exprimer $\mathbb{P}(X = k)$ à l'aide de la fonction R_X .
 - En déduire que X et Y suivent la même loi si et seulement si, pour tout entier naturel k , $R_X(k) = R_Y(k)$.

Partie II

- Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{(n+1)!} = \frac{a}{n!} - \frac{b}{(n+1)!}$.
 - En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n+1)!}$ est convergente et déterminer la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.
- Dans cette question, on considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \frac{n}{(n+1)!}.$$

- Montrer que la variable aléatoire $X + 1$ admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(X + 1)$.
En déduire que X admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(X)$.
- Montrer que la variable aléatoire $(X - 1)(X + 1)$ admet une espérance et calculer $\mathbb{E}((X - 1)(X + 1))$.
En déduire que X admet une variance et calculer $V(X)$.

Partie III

Soit $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement compris entre 0 et 1.

On étudie la durée de vie en années d'un appareil. Tout au long de l'année initiale $k = 0$, on suppose que l'appareil fonctionne. Puis, à l'issue de chaque année numéro k (k étant un entier naturel non nul), l'appareil possède une certaine probabilité de tomber en panne.

Plus précisément, on suppose que, pour tout entier naturel k non nul, si la machine fonctionne encore à l'issue de la $(k - 1)$ ème année, alors elle cesse de fonctionner à la fin de l'année k avec probabilité α_k , et elle continue à fonctionner après la fin de l'année k avec probabilité $1 - \alpha_k$.

On note X la variable aléatoire égale à la durée de vie en années de l'appareil.

- Justifier que, pour tout entier naturel k non nul : $R_X(k) = (1 - \alpha_k)R_X(k - 1)$.
- En déduire, pour tout entier naturel k non nul : $R_X(k) = \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i)$.
- En déduire, pour tout entier naturel k non nul, une expression de $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction des termes de la suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.
On pourra utiliser le résultat de la question 2a.
- Étude de deux exemples.
 - Dans cette question uniquement, on suppose que la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est constante, c'est-à-dire : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \alpha_k = p$.
Reconnaître la loi de X .
 - Dans cette question uniquement, on suppose que, pour tout entier naturel k non nul, $\alpha_k = \frac{k}{k+1}$.
Déterminer la loi de X .

Partie IV - Informatique

9. On considère qu'on dispose d'une fonction python `alpha(k)` qui prend un entier k et renvoie α_k . Compléter le code ci-dessous pour simuler le temps de panne.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def alpha(k):
    return ... # On considere que l'utilisateur a complete cela

def simul_X():
    k = 1
    while .....:
        k = k + 1
    return k
```

10. Ecrire un code utilisant `simul_X()`, appelé `esperance_X(n)`, qui simule n fois une réalisation de X et qui calcule une approximation de l'espérance de X (si elle existe)
11. Dans cette question, on considère que `alpha` est défini ainsi :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def alpha(k):
    return p
```

Quelle valeur, approximativement, devrait afficher `esperance_X(10000)` ?

Corrigé

Exercice 3 Ecricome Math appli 2024

Partie I

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 0, et dont tous les autres coefficients sont égaux à 1 :

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

On note I_n la matrice identité d'ordre n .

1. Étude du cas $n = 3$.

Dans cette question, on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Pourriez vous donner une propriété visuelle de M ? *On ne demande aucun calcul, juste une phrase de quelques mots.*
- (b) Calculer $(M + I)^2$, puis en déduire un polynôme annulateur de M qu'on appellera P .
- (c) Déterminer $\alpha_1 < \alpha_2$ les deux racines de P . Ensuite, déterminer E_{α_1} et E_{α_2} , où, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $E_\lambda = \left\{ X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : MX = \lambda X \right\}$.

Dans les questions qui suivent, on considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (d) Montrer que P est inversible et que :

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans les questions qui suivent, on pose $D = P^{-1}MP$.

- (e) Déterminer les coefficients de la matrice D .
- (f) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel k , $M^k = PD^kP^{-1}$.
- (g) Soit k un entier naturel. On admet qu'il existe deux réels a_k et b_k tels que $M^k = a_kM + b_kI_3$.
En utilisant les résultats des questions précédentes, déterminer a_k et b_k .

2. Cas général : n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2.

On considère la matrice J_n carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 :

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, $(J_n)^k = n^{k-1}J_n$.
- (b) Exprimer M_n en fonction de I_n et J_n .
- (c) En déduire, pour tout entier naturel k non nul :

$$(M_n)^k = c_k J_n + (-1)^k I_n,$$

où :

$$c_k = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i}.$$

- (d) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul,

$$c_k = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n},$$

où c_k est le réel défini à la question précédente.

- (e) En déduire, pour tout entier naturel k non nul, une expression des coefficients diagonaux et des coefficients non diagonaux de $(M_n)^k$, en fonction de n et de k .

Exercice 2 Ecricone math appliquée 2023

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

On rappelle que $2 < e < 3$.

- (a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout réel x de $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{x-1}{2x} f(x).$$

- (b) Dresser le tableau de variations de f et déterminer les limites suivantes $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (c) Tracer l'allure de la courbe représentative de f .
- (d) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'équation $f(x) = n$, d'inconnue x dans $]0, +\infty[$, possède exactement deux solutions u_n et v_n , avec :

$$0 < u_n < 1 < v_n.$$

- (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est croissante.
- (b) Montrer par l'absurde que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
- (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.
- (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ converge.

Dans les questions qui suivent, on note ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$.

- (c) Montrer par l'absurde que $\ell = 0$.
- (d) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 1$ puis un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
- (a) Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et ε un réel strictement positif.
On cherche à déterminer une valeur approchée de u_n avec une marge d'erreur inférieure ou égale à ε .
On rappelle pour cela le principe de l'algorithme de dichotomie.
 - On initialise deux variables a et b en leur affectant respectivement les valeurs 0 et 1.
 - Tant que $b - a > \varepsilon$, on répète les opérations suivantes.
On considère le milieu c du segment $[a, b]$. Par monotonie de f sur $]0, 1]$, en distinguant les cas $f(c) \leq n$ et $f(c) > n$, on peut déterminer si u_n appartient à l'intervalle $[a, c]$ ou à l'intervalle $[c, b]$.
Selon le cas, on met alors à jour la valeur de a ou de b pour se restreindre au sous-intervalle approprié.
 - On renvoie finalement la valeur $\frac{a+b}{2}$, qui constitue une valeur approchée de u_n à ε près.

Recopier et compléter la fonction en langage Python suivante, prenant en entrée un entier n supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif **eps**, et renvoyant une valeur approchée de u_n à **eps** près en appliquant l'algorithme décrit ci-dessus.

```
import numpy as np
```

```
def approx_u(n, eps):
    a = 0
    b = 1
    while _____:
        c = (a+b)/2
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n:
            _____
        else:
            _____
    return (a+b)/2
```

- (b) Écrire une fonction en langage Python, nommée `sp`, prenant en entrée un entier `N` supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif `eps` et renvoyant une valeur approchée de la somme $\sum_{n=2}^N u_n$ à `eps` près.

On pourra faire appel à la fonction `approx_u` définie à la question précédente.

Corrigé

Corrigé Exercice 1 Ecricone Math appli 2024

Partie I

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} R_X(k) &= \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i) \\ &= \sum_{i=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} p(1-p)^{j+k} \\ &= p(1-p)^k \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^j \\ &= (1-p)^k. \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}$, $R_X(k) = (1-p)^k$.

- (b) D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = \frac{(1-p)^k}{(1-p)^{k-1}} = 1-p.$$

Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = 1-p$.

2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $[X > k-1] = [X > k] \cup [X = k]$. Comme $[X > k]$ et $[X = k]$ sont incompatibles,

$$\mathbb{P}(X > k-1) = \mathbb{P}(X > k) + \mathbb{P}(X = k).$$

Donc : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = R_X(k-1) - R_X(k)$.

- (b) ($\implies$) Supposons que X et Y suivent la même loi.

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$R_X(k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = i) = R_Y(k).$$

($\impliedby$) Supposons que $R_X(k) = R_Y(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Alors d'après la question précédente, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = j) = R_X(j-1) - R_X(j) = R_Y(j-1) - R_Y(j) = \mathbb{P}(Y = j).$$

et de plus $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ par hypothèse, donc X et Y suivent la même loi.

Finalement, X et Y suivent la même loi si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}$, $R_X(k) = R_Y(k)$.

Partie II

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1) - 1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{a}{n!} - \frac{b}{(n+1)!}$ avec $a = b = 1$.

- (b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{n}{(n+1)!} &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+1)!} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n!} \\ &= 1 - \frac{1}{(N+1)!}. \end{aligned}$$

Ainsi la suite $\left(\sum_{n=1}^N \frac{n}{(n+1)!}\right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Par définition, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n+1)!}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$.

4. (a) D'après le théorème de transfert, $X+1$ admet une espérance si et seulement si la série suivante converge absolument : $\sum_{n \geq 1} (n+1)\mathbb{P}(X=n)$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)\mathbb{P}(X=n) = (n+1)\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-1)!}$ et, à changement d'indice près, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!}$ est une série exponentielle absolument convergente.

Ainsi $X+1$ admet une espérance, et

$$\mathbb{E}(X+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Par linéarité de l'espérance, comme $X = (X+1)-1$, X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X+1)-1 = e-1$.

- (b) D'après le théorème de transfert, $(X-1)(X+1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} (n-1)(n+1)\mathbb{P}(X=n)$ converge absolument.

Or pour tout entier $n \geq 2$,

$$(n-1)(n+1)\mathbb{P}(X=n) = \frac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-2)!},$$

et en reconnaissant à nouveau le terme général d'une série exponentielle, à changement d'indice près, la série $\sum_{n \geq 1} (n-1)(n+1)\mathbb{P}(X=n)$ converge absolument.

Donc $(X-1)(X+1)$ admet une espérance et

$$\mathbb{E}((X-1)(X+1)) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Par linéarité de l'espérance, comme $X^2 = (X-1)(X+1)+1$, X^2 admet une espérance et $\mathbb{E}(X^2) = e+1$.

D'après la formule de Koenig-Huygens, $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$. Donc X admet une variance et $V(X) = e+1 - (e-1)^2 = e(3-e)$.

Partie III

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

D'après l'énoncé, $1 - \alpha_k$ correspond à la probabilité que l'appareil fonctionne encore à l'issue de l'année k sachant qu'il fonctionnait encore à l'issue de l'année $k-1$.

Alors

$$\begin{aligned} 1 - \alpha_k &= \mathbb{P}(X > k-1 | X > k) \\ &= \frac{\mathbb{P}([X > k] \cap [X > k-1])}{\mathbb{P}(X > k-1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X > k)}{\mathbb{P}(X > k-1)} \\ &= \frac{R_X(k)}{R_X(k-1)}. \end{aligned}$$

Ainsi, $R_X(k) = (1 - \alpha_k)R_X(k-1)$.

6. On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation. Pour $k=1$,

$$R_X(1) = \mathbb{P}(X > 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - \alpha_1 = \prod_{i=1}^1 (1 - \alpha_i).$$

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $R_X(k) = \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i)$. Alors, d'après la question précédente :

$$R_X(k+1) = (1 - \alpha_{k+1})R_X(k) = (1 - \alpha_{k+1}) \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i) = \prod_{i=1}^{k+1} (1 - \alpha_i).$$

Par le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$R_X(k) = \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i).$$

7. D'après la question 2.(a), pour tout entier $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= R_X(k-1) - R_X(k) \\ &= R_X(k-1) - (1 - \alpha_k)R_X(k-1) \\ &= \alpha_k R_X(k-1) \\ &= \alpha_k \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha_i). \end{aligned}$$

Pour $k = 1$, $\mathbb{P}(X = 1) = 1 - R_X(1) = \alpha_1$. Ainsi $\mathbb{P}(X = 1) = \alpha_1$ et pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2,

$$\mathbb{P}(X = k) = \alpha_k \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha_i).$$

8. (a) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et, pour tout entier $k \geq 2$,

$$\mathbb{P}(X = k) = p \prod_{i=1}^{k-1} (1 - p) = p(1 - p)^{k-1},$$

donc X suit la loi géométrique de paramètre p .

(b) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{(1+1)!}$ et, pour tout entier $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \frac{k}{k+1} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{i+1}\right) \\ &= \frac{k}{k+1} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i+1} \\ &= \frac{k}{k+1} \frac{1}{k!} \\ &= \frac{k}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Alors X suit la même loi que la variable aléatoire étudiée dans la Partie II.

Correction

9. A l'année k , l'appareil tombe en panne avec la probabilité α_k . Il continue donc à fonctionner avec la probabilité $1 - \alpha_k$. On simule donc des années successives tant qu'on ne provoque pas la panne.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def alpha(k):
    return ... # On considere que l'utilisateur a complete cela

def simul_X():
    k = 1
    while rd.random() > alpha(k):
        k = k + 1
    return k
```

10. On simule n réalisations indépendantes de X , puis on calcule leur moyenne.

```
def esperance_X(n):  
    s = 0  
    for i in range(n):  
        s = s + simul_X()  
    return s / n
```

11. Ici, pour tout entier $k \geq 1$, on a $\alpha_k = p$. D'après la partie III, la variable aléatoire X suit alors une loi géométrique de paramètre p .

Donc, $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$.

Par conséquent, pour n grand, `esperance_X(10000)` devrait afficher une valeur proche de $\frac{1}{p}$.

Corrigé Exercice 3 Ecricome Math appli 2024

Exercice 3

- (1) (a) M est symétrique.
(b)

$$(M + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3(M + I_3).$$

Ainsi $(M + I_3)^2 - 3(M + I_3) = 0_3$, c'est-à-dire $(M + I_3)(M - 2I_3) = 0_3$.

Autrement dit, $(x + 1)(x - 2)$ est un polynôme annulateur de M .

- (c) $\diamond$ Les racines du polynôme $(x + 1)(x - 2)$ sont -1 et 2 .

$\diamond$ Résoudre le système $M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{pmatrix}$ donne $a + b + c = 0$. Ainsi,

$$E_{-1} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\diamond$ De même, on trouve

$$E_2 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (d) On pose

$$Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $PQ = QP = I_3$. Ainsi P est inversible et

$$P^{-1} = Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (e) En effectuant le calcul, on trouve

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (f) On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Pour $k = 0$, $M^0 = I_3 = P I_3 P^{-1} = P D^0 P^{-1}$.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $M^k = P D^k P^{-1}$. Alors, d'après la question précédente, $M = P D P^{-1}$, donc

$$M^{k+1} = M M^k = P D P^{-1} P D^k P^{-1} = P D D^k P^{-1} = P D^{k+1} P^{-1}.$$

Donc par le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = P D^k P^{-1}$.

- (g) Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour déterminer a_k et b_k , on peut par exemple calculer les deux premiers coefficients de la première ligne de M^k , et les comparer avec ceux de $a_k M + b_k I_3$.

Comme D étant diagonale,

$$D^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

Puis

$$M^k = P D^k P^{-1} = P \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^k & -2(-1)^k & (-1)^k \\ (-1)^k & (-1)^k & -2(-1)^k \\ 2^k & 2^k & 2^k \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(-1)^k + 2^k & 2^k - (-1)^k & c_k \\ d_k & e_k & f_k \\ g_k & h_k & i_k \end{pmatrix},$$

où $c_k, d_k, e_k, f_k, g_k, h_k, i_k$ sont des coefficients qu'on ne cherche pas à calculer.

Par ailleurs,

$$a_k M + b_k I_3 = \begin{pmatrix} b_k & a_k & a_k \\ a_k & b_k & a_k \\ a_k & a_k & b_k \end{pmatrix}.$$

Donc en identifiant les coefficients :

$$a_k = \frac{2^k - (-1)^k}{3} \quad \text{et} \quad b_k = \frac{2(-1)^k + 2^k}{3}.$$

- (2) (a) On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation. Pour $k = 1$, $J_n^1 = n^0 J_n$.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose $J_n^k = n^{k-1} J_n$. Par calcul matriciel on obtient que $J_n^2 = n J_n$. Alors

$$J_n^{k+1} = J_n^k J_n = n^{k-1} J_n \cdot J_n = n^{k-1} \cdot n J_n = n^k J_n.$$

Finalement, par le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $J_n^k = n^{k-1} J_n$.

- (b) $M_n = J_n - I_n$.

- (c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $J_n(-I_n) = (-I_n)J_n$, donc par la formule du binôme de Newton et puisque les deux matrices commutent,

$$\begin{aligned} M_n^k &= (J_n - I_n)^k \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} J_n^i (-I_n)^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} J_n^i \\ &= (-1)^k I_n + \left(\sum_{i=1}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} n^{i-1} \right) J_n. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad M_n^k = (-1)^k I_n + \left(\sum_{i=1}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} n^{i-1} \right) J_n.$$

- (d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} n^i (-1)^{k-i} \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} n^i (-1)^{k-i} - (-1)^k \right) \\ &= \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}. \end{aligned}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad c_k = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}.$$

- (e) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M_n^k = c_k J_n + (-1)^k I_n$.

Donc les coefficients diagonaux de M_n^k sont tous égaux à

$$c_k + (-1)^k = \frac{(n-1)^k + (n-1)(-1)^k}{n},$$

et les coefficients non diagonaux de M_n^k sont égaux à

$$c_k = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}.$$

Corrigé Exercice 2 Ecrimage Math appli 2023

1. (a) La fonction f est bien dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur cet intervalle, et :

$$\begin{aligned}\forall x \in]0; +\infty[, \quad f'(x) &= \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\sqrt{x} - e^{\frac{x}{2}}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{1}{x} \times \frac{e^{\frac{x}{2}} \cdot (\sqrt{x})^2 - e^{\frac{x}{2}}}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{x-1}{2x} \times \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{x-1}{2x} f(x).\end{aligned}$$

- (b) Sur le domaine $]0; +\infty[$, il est clair qu'on a toujours $2x > 0$ et $f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} > 0$, donc $f'(x)$ est sur cet intervalle, du signe de $x-1$.

On en déduit donc que f est strictement décroissante sur $]0; 1]$, puis strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

Calcul des limites aux bornes du domaine :

— $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x}{2}} = e^0 = 1$ par continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, et $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0^+$, donc par quotient $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

— On a directement $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} = +\infty$: c'est un résultat de croissances comparées du type

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} \text{ avec } \beta = \alpha = \frac{1}{2} > 0.$$

- (c) On trace l'allure de la courbe représentative de f en tenant compte des propriétés obtenues : la courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 (et d'ordonnée $f(1) = e^{1/2} = \sqrt{e}$ compris entre 1 et 2), ainsi qu'une asymptote verticale au voisinage de 0.
- (d) Soit n un entier supérieur ou égal à 2 : comme on l'a déjà dit, $1 < e^{1/2} < 2$ (car $1 < e < 4$), donc $n > e^{1/2}$, et :

— Sur $]0; 1]$, la fonction f est continue (car dérivable), strictement décroissante et n appartient à l'intervalle

$$[f(1); \lim_{x \rightarrow 0} f(x)[= [e^{1/2}; +\infty[.$$

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = n$ admet donc une unique solution u_n sur $]0; 1]$ (avec $u_n < 1$ puisque $f(1) < n$).

— Sur $[1; +\infty[$, la fonction f est continue, strictement croissante et n appartient à l'intervalle

$$[f(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [e^{1/2}; +\infty[.$$

D'après le même théorème, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution v_n sur $[1; +\infty[$.

Pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $f(x) = n$ admet donc exactement 2 solutions u_n et v_n sur $]0; +\infty[$, telles que $0 < u_n < 1 < v_n$.

2. (a) Pour tout entier $n \geq 2$, l'inégalité évidente : $n < n+1$ se réécrit aussi $f(v_n) < f(v_{n+1})$.

Or tous les termes de la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ appartiennent à l'intervalle $[1; +\infty[$ sur lequel la fonction f est strictement croissante : on en déduit que $\forall n \geq 2$, $v_n < v_{n+1}$ (les antécédents sont rangés dans le même ordre que les images), ce qui prouve que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante.

- (b) Supposons ici que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ converge vers une limite $\ell \geq 1$: alors par continuité de f sur $[1; +\infty[$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = f(\ell) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} n = f(\ell),$$

ce qui est évidemment absurde puisque $f(\ell)$ est un réel, tandis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$.

3. (a) Selon un raisonnement analogue à celui de la question 2.a) :

$$\forall n \geq 2, \quad n < n+1 \iff f(u_n) < f(u_{n+1}) \iff u_n > u_{n+1},$$

puisque tous les termes de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ appartiennent à l'intervalle $]0; 1[$, sur lequel la fonction f est strictement décroissante. La suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est donc bien strictement décroissante.

- (b) On vient de voir que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante ; or elle est aussi minorée par 0, puisque : $\forall n \geq 2, 0 < u_n < 1$.

La suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est donc convergente, d'après le théorème de limite monotone ; notons ℓ sa limite, qui est un nombre réel compris entre 0 et 1.

- (c) Si on suppose $\ell > 0$, alors de façon analogue à ce qui a été fait en 2.b), on peut écrire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell) \in \mathbb{R} \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} n = f(\ell) \in \mathbb{R},$$

ce qui est à nouveau absurde. Ainsi donc $\ell > 0$ est impossible : on conclut que

$$\ell = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

- (d) Examinons plus précisément l'équation que u_n est le seul réel de $]0; 1[$ à vérifier :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2, \quad f(u_n) = n &\iff \frac{e^{\frac{u_n}{2}}}{\sqrt{u_n}} = n \\ &\iff e^{\frac{u_n}{2}} = n\sqrt{u_n} \\ &\iff e^{u_n} = n^2 u_n. \end{aligned}$$

Ainsi, par continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{u_n} = e^0 = 1.$$

Ce résultat s'écrit aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{1/n^2} = 1$, et donne donc l'équivalent : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

4. (a) L'algorithme de dichotomie est depuis longtemps un incontournable des sujets de l'ex-voie ECE, qui a été repris tel quel dans le programme de Mathématiques Approfondies ; il est toujours indispensable de le maîtriser parfaitement !

```
import numpy as np
def approx_u(n, eps):
    a = 0
    b = 1
    while b - a > eps:
        c = (a+b)/2
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n:
            b = c
        else:
            a = c
    return (a+b)/2
```

Comme la fonction f est strictement décroissante sur $]0; 1[$:

si $f(c) < n$, alors $f(c) < f(u_n) \iff c > u_n$ et u_n appartient à l'intervalle $[a; c]$: il convient donc d'actualiser b en lui donnant la valeur de c .

Sinon, $u_n \in [c; b]$ et c'est a qui est actualisée, on lui donne la valeur de c .

L'algorithme s'arrête lorsque pour la première fois, $b - a \leq \varepsilon$: cela signifie que a et b encadrent u_n à ε près, et un dernier calcul du milieu de l'intervalle fournit bien une valeur approchée de u_n à ε près.

- (b) L'algorithme de calcul d'une somme est assez facile à écrire grâce à une boucle **for**. Il y a cependant ici une vraie subtilité à laquelle il fallait prendre garde :

L'algorithme de dichotomie précédent calcule seulement une valeur approchée de chaque terme u_n à la précision ε , c'est-à-dire que la valeur rendue à chaque fois contient potentiellement une erreur d'approximation comprise entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$.

Comme on ajoute ces valeurs approchées, les erreurs d'approximation s'ajoutent aussi ! Concrètement puisqu'il y a $N - 1$ termes dans cette somme, l'erreur d'approximation finale pour la valeur de $\sum_{n=2}^N u_n$

sera comprise entre $-(N - 1)\varepsilon$ et $+(N - 1)\varepsilon$.

Il conviendra donc, dans chaque appel à la fonction **approx_u**, de demander plutôt une précision $\frac{\varepsilon}{N}$ pour que le résultat rendu soit bien une valeur approchée de la somme voulue à ε près.

```
def somme_u(N,eps):  
    s = 0  
    for n in range(2,N+1):  
        s = s + approx_u(n,eps/N)  
    return s
```