
DS début juin 2

CONSIGNES

Tous les feuillets doivent être identifiables et numérotés par le candidat.

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Partie 1

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$. On a donc $u_0 = 1$.

- 1) a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive.
b) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 2) a) Montrer que, pour tout x de $[0, 1]$, on a l'inégalité : $e^{x/2} \leq 1 + x$.
b) En déduire, pour tout entier naturel n , l'inégalité : $u_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2/2} dt$.
c) On rappelle que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$. Donner la valeur, pour tout entier naturel n non nul, de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2/2} dt$.
d) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Partie 2

- 3) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ est convergente.

Pour toute la suite, on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ et $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$

- 4) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n-1}$
b) En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.
- 5) a) Montrer, grâce à une intégration par parties effectuée dans J_n , que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n = 2n(J_n - J_{n+1})$
b) Déterminer J_1 .
c) Montrer que la série de terme général $\frac{J_n}{n}$ est convergente et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_n}{n} = \pi$.
d) Utiliser la relation de la question 5a) pour compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie la valeur de J_n .

```
def suiteJ(n):
    J=----
    for k in range(2,n+1):
        J=----
    return J
```

- 6) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$

Partie 3

On désigne par n un entier naturel non nul et on note X_n (resp. Y_n) le nombre de "piles" (resp. "faces") obtenus lors des $2n$ premiers lancers supposés indépendants d'une pièce équilibrée.

- 7) a) Donner, en justifiant, la loi de X_n .
b) Montrer que $P(X_n = Y_n) = \frac{2}{\pi} J_{n+1}$ et en déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = Y_n)$.
c) Justifier sans calcul l'égalité $P(X_n < Y_n) = P(X_n > Y_n)$.
d) Montrer que la probabilité d'obtenir strictement moins de "piles" que de "faces" lors de l'expérience décrite plus haut tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- 8) Pour tout entier naturel k non nul, on considère la variable aléatoire Z_k qui vaut 1 si l'on a obtenu "pile" au k^e lancer et 0 sinon.

- a) Vérifier que l'on a $\sum_{k=1}^{2n} Z_k = X_n$.

b),c) Les deux dernières questions du sujet sont pour l'année prochaine ;)

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0.

Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O .

Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant n ($n \in \mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable, sur l'un des points d'abscisses $0, 1, \dots, n$.

Pour tout entier naturel n , on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n (on a donc $X_0 = 0$).

On admet que, pour tout entier naturel n , X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet aussi que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

- 1)
 - a) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, la loi de X_n .
 - b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, X_n possède une espérance et une variance, puis déterminer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.
- 2) On note Y le rang du premier retour à l'origine du mobile et on admet que Y est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
 - a) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer l'événement $(Y = n)$ à l'aide des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$.
 - b) En déduire que la loi de Y est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}$.
 - c) Vérifier par le calcul que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y = n) = 1$.
 - d) La variable Y admet-elle une espérance ?
- 3)
 - a) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$.
 - b) En déduire que : $\forall j \geq 2, \quad \ln j \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leq \ln j + 1 - \frac{1}{j}$.
 - c) Conclure alors que : $\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \underset{j \rightarrow +\infty}{\sim} \ln j$.
- 4) On note Z le rang du deuxième retour à l'origine du mobile et on admet que Z est une variable aléatoire, définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
 - a) Déterminer pour tout $i \geq j$, la probabilité $P_{(Y=i)}(Z = j)$.
 - b) Établir que : $\forall i \leq j-1, \quad P_{(Y=i)}(Z = j) = \frac{i+1}{j(j+1)}$.
 - c) Écrire, pour tout entier naturel j supérieur ou égal à 2, la probabilité $P(Z = j)$ comme une somme finie.
 - d) La variable aléatoire Z possède-t-elle une espérance ?

5) Informatique

On rappelle qu'en Python, l'instruction `rd.randint(a,b+1)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme à valeurs dans $\llbracket a, b \rrbracket$.

- a) Écrire des commandes Python calculant et affichant la valeur de l'abscisse du mobile après son n^e déplacement lorsque la valeur de n est entrée au clavier par l'utilisateur.
- b) Compléter le script Python suivant pour qu'il permette d'afficher dans cet ordre les valeurs prises par les variables aléatoires Y et Z .

```
n = 0
a = 0
while a < 2:
    n = n+1
    if rd.randint(0,n+1) == 0:
        a = a+1
        if a == 1:
            y = n
print("y=", ---)
print("z=", ---)
```

Partie 1

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt$.

- 1) a) Calculer u_0 et u_1 .
 b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
 c) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
- 2) a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$.
 b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$.
 c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}$.
 d) En déduire la valeur de u_{2n+1} .
- 3) a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+2}}{u_n}$.
 b) En déduire, par encadrement, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.
 c) Montrer enfin que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
- 4) Utiliser la question 2c) pour compléter les commandes Python suivantes afin qu'elles permettent de calculer u_n lorsque n est entré par l'utilisateur.

```
n = int(input('entrez la valeur de n : '))
u = np.pi/2
for -----
    -----
print(u)
```

Partie 2

On note f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- 5) Démontrer que f est positive, continue par morceaux, et que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.
- 6) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$
- 7) a) Démontrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge, et calculer cette intégrale.
 b) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ converge, et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt \right)^2$.
- 8) ¹ Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on considère une suite $(X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n})$ de variables aléatoires toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.
 On pose : $I_n = \min(X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n})$.
 a) Déterminer, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la probabilité $P(I_n \geq k)$.
 b) En déduire que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $P(I_n = k) = \left(\frac{n-k+1}{n} \right)^n - \left(\frac{n-k}{n} \right)^n$.
 c) Montrer que, pour tout $1 > \varepsilon > 0$, on a : $P\left(\frac{I_n}{n} > \varepsilon\right) \leq \left(1 - \varepsilon + \frac{1}{n}\right)^n$ pour tout entier n .
 d) En déduire que la suite $\left(\frac{I_n}{n}\right)_{n \geq 2}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire constante que l'on précisera.

9) Simulation.

On rappelle que la commande `rd.randint(a,b,N)` renvoie un **array** contenant N simulation d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket a, b-1 \rrbracket$.

1. Pas l'énoncé original - je l'ai modifié pour le rendre faisable en première année

- a) Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire I_n .

```
def simul_I(n):  
    X = rd.randint(1,n+1,n)  
    I = ---  
    return I
```

- b) Compléter les commandes Python suivantes afin de simuler N réalisations de la variable aléatoire $\frac{I_n}{n}$.

```
def simul(n,N):  
    L = np.zeros(N)  
    for k in range(...):  
        L[k] = ----..  
    return ...
```

- c) Que doit-on observer lorsque n devient grand ?

Corrigé Problème EDHEC Math appro 2024 – David Meneu

Partie 1

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$. On a donc $u_0 = 1$.

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0; 1]$, $1+t^2 \geq 1$ donc :

$$(1+t^2)^{n+1} \geq (1+t^2)^n \geq 1 \implies 0 < \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \leq \frac{1}{(1+t^2)^n}$$

par stricte décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}_+$.

Les fonctions comparées sont continues sur $[0; 1]$ et $0 < 1$, donc par croissance et positivité de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_{n+1} \leq u_n,$$

ce qui prouve bien que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive.

- b) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 : d'après le théorème de limite monotone, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente (de limite $\ell \geq 0$).
2. a) Définissons sur $[0; 1]$, la fonction $g : x \mapsto e^{x/2} - 1 - x$. Cette fonction est dérivable sur $[0; 1]$ comme somme de fonctions qui le sont, et $\forall x \in [0; 1]$, $g'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2} - 1 \leq \frac{e^{1/2}}{2} - 1$ par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.

Or $e^{1/2} = \sqrt{e}$, et on sait que $2 < e < 3 \implies 1 < \sqrt{e} < 2 \implies \frac{e^{1/2}}{2} - 1 < 0$, ce qui prouve que $g'(x) < 0$ pour tout $x \in [0; 1]$, et donc que g est strictement décroissante sur $[0; 1]$.

Ainsi : $\forall x \in [0; 1]$, $g(x) \leq g(0) = e^0 - 1 = 0 \implies \forall x \in [0; 1]$, $e^{x/2} \leq 1 + x$.

- b) Pour tout $t \in [0; 1]$, $t^2 \in [0; 1]$ donc d'après ce qui précède,

$$0 < e^{t^2/2} \leq 1 + t^2 \implies 0 < \left(e^{t^2/2}\right)^n \leq (1+t^2)^n$$

par croissance de la fonction puissance n -ième sur $\mathbb{R}_+$. Par stricte décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0; 1], \quad 0 < \frac{1}{(1+t^2)^n} \leq e^{-nt^2/2}.$$

Les fonctions comparées sont continues sur $[0; 1]$ et $0 < 1$, donc par croissance de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = u_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2/2} dt.$$

- c) En effectuant le changement de variable $u = t\sqrt{n}$, on trouve que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

- d) La fonction $t \mapsto e^{-nt^2/2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^0 e^{-nt^2/2} dt}_{\geq 0} + \int_0^1 e^{-nt^2/2} dt + \underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-nt^2/2} dt}_{\geq 0} \geq \int_0^1 e^{-nt^2/2} dt,$$

donc par transitivité de l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} = 0$, le théorème d'encadrement assure que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}.$$

Partie 2

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est bien définie et continue sur $[0; +\infty[$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ est impropre en $+\infty$.

Pour tout réel $t \geq 1$:

$$0 < \frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{(t^2)^n} = \frac{1}{t^{2n}}.$$

Or $n \geq 1$ donc $2n \geq 2 > 1$: l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} dt$ est convergente, donc par comparaison d'intégrales de fonctions positives et continues, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ converge, et par conséquent l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ converge aussi.

Pour toute la suite, on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt.$$

4. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme on l'a vu précédemment :

$$\forall t \geq 1, \quad 0 < \frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{t^{2n}}.$$

Les fonctions comparées sont continues sur $[1; +\infty[$ et les intégrales convergent, donc par croissance et positivité de l'intégrale :

$$0 \leq I_n \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} dt = \frac{1}{2n-1}.$$

- b) Il est alors évident que puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$, par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0}.$$

- c) Il est clair, d'après la relation de Chasles, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n = u_n + I_n,$$

donc d'après les résultats de 2.d) et 4.b) :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0}.$$

5. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $A > 0$. Dans l'intégrale $\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$, on réalise une intégration par parties en posant :

$$u(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n} = (1+t^2)^{-n} \longrightarrow u'(t) = -2nt(1+t^2)^{-n-1} = -\frac{2nt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

$$v'(t) = 1 \longrightarrow v(t) = t$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0; +\infty[$, donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n} dt &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^A + 2n \int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n \int_0^A \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n \int_0^A \left(\frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \right) dt. \end{aligned}$$

Puisque

$$\frac{A}{(1+A^2)^n} \underset{A \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{A^{2n}} = \frac{1}{A^{2n-1}} \underset{A \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (\text{vu que } 2n-1 \geq 1),$$

et puisque les intégrales J_n et J_{n+1} convergent, alors on peut passer à la limite lorsque A tend vers $+\infty$ pour obtenir la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J_n = 2n(J_n - J_{n+1}).$$

b) Par définition :

$$J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\arctan(A) - \arctan(0)) = \frac{\pi}{2}.$$

c) D'après 5.a) : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{J_n}{n} = 2(J_n - J_{n+1})$, donc

$$\sum_{n=1}^N \frac{J_n}{n} = 2 \sum_{n=1}^N (J_n - J_{n+1}) = 2(J_1 - J_{N+1}) = \pi - 2J_{N+1}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$ (question 4.c)), alors la série de terme général $\frac{J_n}{n}$ est bien convergente, et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_n}{n} = \lim_{N \rightarrow +\infty} (\pi - 2J_{N+1}) = \pi.$$

d) La relation de la question 5.a) se réécrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2nJ_{n+1} = (2n-1)J_n \iff J_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) J_n,$$

ou encore :

$$\forall n \geq 2, \quad J_n = \left(1 - \frac{1}{2n-2}\right) J_{n-1}.$$

On en déduit le script Python suivant qui permet de calculer la valeur de J_n :

```
def suiteJ(n):
    J = np.pi/2
    for k in range(2, n+1):
        J = (1 - 1/(2*k-2)) * J
    return J
```

6. On peut ici raisonner par récurrence sur n , pour montrer que $\mathcal{P}(n)$: " $J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n+1}}{4^n}$ ", est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I. Pour $n = 0$: d'une part, $J_{0+1} = \frac{\pi}{2}$ et d'autre part, $\binom{0}{0} = 1 = 4^0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

H. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, soit :

$$J_{n+2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}}.$$

On sait d'après 5.c) que :

$$J_{n+2} = \left(1 - \frac{1}{2n+2}\right) J_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} J_{n+1},$$

donc par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} J_{n+2} &= \frac{\pi}{2} \times \frac{\frac{2n+1}{2n+2} \binom{2n}{n}}{4^n} \\ &= \frac{\pi}{2} \times \frac{\frac{(2n+1) \times (2n)!}{2(n+1) \times n! n!}}{4^n} \\ &= \frac{\pi}{2} \times \frac{\frac{(2n+2) \times (2n+1)!}{2(n+1) \times 2 \times (n+1)! n!}}{4^n} \\ &= \frac{\pi}{2} \times \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)! (n+1)!}}{4^{n+1}} \\ &= \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}}, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

C. La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

Partie 3

On désigne par n un entier naturel non nul et on note X_n (resp. Y_n) le nombre de "piles" (resp. "faces") obtenus lors des $2n$ premiers lancers supposés indépendants d'une pièce équilibrée.

7. a) Chaque lancer de pièce peut être considéré comme une épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir pile" est de probabilité $\frac{1}{2}$. La variable aléatoire X_n compte le nombre de succès lors de la répétition de $2n$ épreuves identiques et indépendantes : cette variable suit donc la loi binomiale de paramètres $\left(2n, \frac{1}{2}\right)$.

$$X_n(\Omega) = \llbracket 0; 2n \rrbracket, \quad \forall k \in X_n(\Omega), \quad P(X_n = k) = \binom{2n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

- b) L'événement $[X_n = Y_n]$ est égal à l'événement $[X_n = n]$ puisqu'on veut autant de piles que de faces en $2n$ lancers, donc :

$$P(X_n = Y_n) = P(X_n = n) = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \frac{2}{\pi} J_{n+1}$$

d'après le résultat de la question 6.

D'après 4.c), on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = Y_n) = 0.$$

- c) La pièce lancée est équilibrée, et il y a par symétrie autant de situations où au cours des $2n$ lancers, la pièce donne strictement plus de piles que de faces, que de situations où la pièce donne strictement plus de faces que de piles. Ceci suffit à justifier que :

$$P(X_n < Y_n) = P(X_n > Y_n).$$

- d) Les événements $([X_n < Y_n], [X_n = Y_n], [X_n > Y_n])$ forment un système complet d'événements, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X_n < Y_n) + P(X_n = Y_n) + P(X_n > Y_n) = 1 \iff 2P(X_n < Y_n) = 1 - P(X_n = Y_n)$$

$$\iff P(X_n < Y_n) = \frac{1}{2} (1 - P(X_n = Y_n)).$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = Y_n) = 0$ (question 7.b)), alors on a bien

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n < Y_n) = \frac{1}{2}.$$

8. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire Z_k qui vaut 1 si le k -ième lancer donne "pile", et 0 sinon.

- a) Il est clair que $\sum_{k=1}^{2n} Z_k$ est une variable aléatoire qui compte le nombre de "piles" obtenus au cours des $2n$ lancers de la pièce : chaque "pile" obtenu à un lancer k donne la valeur 1 à la variable Z_k correspondante, qui contribue ainsi d'une unité à la somme, sinon Z_k prend la valeur 0 et la somme ne change pas de cette valeur en intégrant ce terme. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{2n} Z_k = X_{2n}.$$

Corrigé Exercice 3 EDHEC Math appro 2018

1. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la variable X_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket$: elle est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ avec

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(X_n = k) = \frac{1}{n+1}.$$

- b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la variable finie X_n admet une espérance donnée par :

$$E(X_n) = \sum_{x \in X_n(\Omega)} x P(X_n = x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k = \frac{n}{2}.$$

On obtient de même l'existence et la valeur de

$$E(X_n^2) = \sum_{x \in X_n(\Omega)} x^2 P(X_n = x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(2n+1)}{6}$$

d'où finalement celles de

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = \frac{n(2n+1)}{6} - \frac{n^2}{4} = \frac{n(n+2)}{12}.$$

2. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$[Y = n] = [X_1 > 0] \cap \dots \cap [X_{n-1} > 0] \cap [X_n = 0].$$

- b. Par indépendance des variables $X_1, \dots, X_n$, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(Y = n) = P(X_n = 0) \prod_{k=1}^{n-1} P(X_k > 0) = \frac{1}{n+1} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

par télescope.

- c. On a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 1$$

par télescope, l'existence de la limite finie garantissant la convergence de la série².

Remarque. Ainsi l'éventualité que le mobile ne revienne jamais à l'origine est-elle de probabilité nulle, ce qui permet d'accepter la définition de Y comme variable aléatoire.

- d. La variable Y n'admet pas d'espérance car la série de terme général

$$nP(Y = n) = \frac{1}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} > 0$$

est divergente par comparaison à la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, divergente.

3. a. Pour changer de la comparaison série-intégrale³, déjà utilisée dans le premier exercice, on peut plutôt s'appuyer sur l'inégalité des accroissements finis : pour $k \in \mathbb{N}^*$ donné, la fonction $\ln$ étant dérivable sur $[k, k+1]$ avec

$$\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{k+1} \leq \ln'(t) = \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k},$$

elle garantit que

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

2. Que l'on savait déjà convergente car les événements $[Y = n]$, $n \geq 1$, sont deux-à-deux incompatibles.

3. Partant de

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(k+1) - \ln k = \int_k^{k+1} \frac{dt}{t},$$

on pourrait en effet justifier, par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $[1, +\infty[$, que :

$$\forall k \geq 1, \quad \frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k}.$$

- b. Pour $j \geq 2$, on obtient en sommant les inégalités établies a. pour k variant entre 1 et $j - 1$, par télescopage et changement d'indice :

$$\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{j} = \sum_{k=2}^j \frac{1}{k} \leq \ln j \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k},$$

d'où il ressort que :

$$\ln j \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leq \ln j + 1 - \frac{1}{j}.$$

- c. En divisant tous les membres de l'inégalité obtenue en b. par $\ln j > 0$, on obtient :

$$\forall j \geq 2, \quad 1 \leq \frac{1}{\ln j} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \frac{1}{\ln j} - \frac{1}{j \ln j}$$

où les deux membres extrêmes convergent vers 1 lorsque $j \rightarrow \infty$. On en déduit par encadrement qu'il en va de même du membre central, ce qui signifie que :

$$\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \underset{j \rightarrow +\infty}{\sim} \ln j.$$

4. a. Pour $i \geq j \geq 1$, les événements $[Y = i]$ et $[Z = j]$ sont incompatibles, si bien que

$$P_{[Y=i]}(Z = j) = 0.$$

- b. Soient $1 \leq i < j$ entiers. Conditionnellement à l'événement $[Y = i]$, on a $Z = j$ si, et seulement si, l'événement

$$[X_{i+1} > 0] \cap \dots \cap [X_{j-1} > 0] \cap [X_j = 0]$$

se réalise. Puisque l'événement $[Y = i]$ appartient à la tribu $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_i)$ d'après 2.a., indépendante de la tribu $\mathcal{A}(X_{i+1}, \dots, X_j)$ d'après le lemme des coalitions et l'indépendance des variables $X_1, \dots, X_i, \dots, X_j$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} P_{[Y=i]}(Z = j) &= P_{[Y=i]} \left([X_j = 0] \cap \bigcap_{k=i+1}^{j-1} [X_k > 0] \right) \\ &= P \left([X_j = 0] \cap \bigcap_{k=i+1}^{j-1} [X_k > 0] \right) \\ &= P(X_j = 0) \prod_{k=i+1}^{j-1} P(X_k > 0) \\ &= \frac{1}{j+1} \prod_{k=i+1}^{j-1} \frac{k}{k+1} \\ &= \frac{i+1}{j(j+1)}. \end{aligned}$$

- c. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet associé à la variable Y , il vient d'après 2.b., a. et b. :

$$\forall j \geq 2, \quad P(Z = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y = i) P_{[Y=i]}(Z = j) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{ij(j+1)} = \frac{1}{j(j+1)} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i}.$$

- d. D'après les questions 3.c. et c.,

$$jP(Z = j) = \frac{1}{j+1} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i} \underset{j \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln j}{j},$$

d'où il ressort que

$$0 \leq \frac{1}{j} = o(jP(Z = j))$$

lorsque $j \rightarrow +\infty$, si bien que la série $\sum_j jP(Z = j)$ diverge par comparaison à la série harmonique, divergente : la variable Z n'admet donc pas d'espérance.

Remarque. Ce résultat peut être justifié plus simplement à partir du théorème de domination : sachant que $0 \leq Y \leq Z$ où Y n'admet pas d'espérance d'après 2.d., la variable Z ne peut admettre d'espérance.

5. a. Script et question complètement artificiels, pour ne pas dire sans intérêt, mais il faut tout de même répondre :

```
def X(n):
    return rd.randint(0,n+1)
```

simule le n -ième déplacement du mobile et affiche sa nouvelle position.

- b. Le script ci-dessous répond à la question.

```
n = 0
a = 0
while a < 2:
    n = n+1
    if rd.randint(0,n+1) == 0:
        a = a+1
        if a == 1:
            y = n
print("y=", y)
print("z=", n)
```

Corrigé Problème EDHEC Math appro 2018

Première partie

1. a. Il vient immédiatement :

$$u_0 = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad u_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = 1.$$

- b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq \cos t \leq 1$ donc $\cos^{n+1} t \leq \cos^n t$ pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, si bien que $u_{n+1} \leq u_n$ par croissance de l'intégrale. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.
- c. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \cos^n t$ positive, continue mais non identiquement nulle sur le segment non trivial $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y admet une intégrale strictement positive :

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt > 0.$$

2. a. Pour $n \in \mathbb{N}$, il vient par intégration par parties (en dérivant $t \mapsto \cos^{n+1} t$ et en primitivant $t \mapsto \cos t$) :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos t \cos^{n+1} t \, dt \\ &= [\sin t \cos^{n+1} t]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^n t \, dt \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \cos^n t \, dt \\ &= (n+1)(u_n - u_{n+2}) \end{aligned}$$

de sorte que $(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$. On obtient ainsi une relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n. \quad (1)$$

- b. On démontre le résultat par récurrence à partir de (1) : il est immédiat au rang $n = 0$ vu 1.a. et, s'il est acquis à un rang $n \geq 0$, alors

$$\begin{aligned} u_{2(n+1)} &= u_{2n+2} \\ &= \frac{2n+1}{2n+2} u_{2n} \\ &= \frac{2n+2}{2(n+1)} \frac{2n+1}{2(n+1)} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2(n+1))!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

- c. Toujours d'après a., il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)u_{n+2}u_{n+1} = (n+1)u_{n+1}u_n,$$

si bien que la suite $((n+1)u_{n+1}u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, égale à son premier terme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)u_{n+1}u_n = u_1 u_0 = \frac{\pi}{2}.$$

- d. D'après b. et c.,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)u_{2n}} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

3. a. D'après 2.(1),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+2}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1.$$

b. D'après 1.b. et 1.c.,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+2}}{u_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{u_n}{u_n} = 1$$

d'où il ressort, par encadrement d'après a., que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

c. La question b. assure que $u_n \sim u_{n+1}$ si bien que

$$(n+1)u_n^2 \sim (n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}$$

d'après 2.c., d'où finalement

$$u_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

4. N'en déplaise à l'auteur du sujet, on propose ci-dessous une fonction calculant u_n plutôt qu'un script à la mode grand-papa...

```
def u(n):
    u = np.pi/2
    for k in range(n):
        u = np.pi/2/u/(k+1)
    print(u)
```

Deuxième partie

5. La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et $\frac{\pi}{2}$, d'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{\pi/2} \sin t dt = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1,$$

convergente puisque la primitive choisie admet des limites finies en 0 et 1.

6. Puisque f est nulle en dehors de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a déjà $F(x) = 0$ pour $x < 0$ et $F(x) = 1$ pour $x > \frac{\pi}{2}$. Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$F(x) = \int_0^x \sin t dt = 1 - \cos x.$$

En conclusion,

$$F : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \cos x & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \end{cases}.$$

7. a. En fait, l'intégrale est finie, donc elle est convergente, et on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{\pi/2} t \sin t dt = [-t \cos t]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos t dt = 1.$$

b. On justifie de même l'existence et on calcule grâce à deux intégrations par parties successives la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_0^{\pi/2} t^2 \sin t dt = \pi - 2.$$

On en déduit l'existence et la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt \right)^2 = \pi - 3.$$

- 8) a) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a $[I_n \geq k] = [X_{1,n} \geq k] \cap [X_{2,n} \geq k] \cap \dots \cap [X_{n,n} \geq k]$. Or les variables aléatoires $X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n}$ sont mutuellement indépendantes. Donc :

$$P(I_n \geq k) = P(X_{1,n} \geq k) \times P(X_{2,n} \geq k) \times \dots \times P(X_{n,n} \geq k) = P(X_{1,n} \geq k)^n.$$

Comme $X_{1,n}$ suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} P(X_{1,n} \geq k) &= P(X_{1,n} \in \llbracket k, n \rrbracket) \\ &= \frac{n - k + 1}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(I_n \geq k) = \left(\frac{n - k + 1}{n} \right)^n$.

- b) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On remarque que $[I_n = k] = [I_n \geq k] \setminus [I_n \geq k + 1]$. Donc, puisque $[I_n \geq k] \subset [I_n \geq k + 1]$,

$$P(I_n = k) = P(I_n \geq k) - P(I_n \geq k + 1).$$

D'après la question précédente :

$$P(I_n = k) = \left(\frac{n - k + 1}{n} \right)^n - \left(\frac{n - (k + 1) + 1}{n} \right)^n = \left(\frac{n - k + 1}{n} \right)^n - \left(\frac{n - k}{n} \right)^n.$$

- c) Soit $1 > \varepsilon > 0$. On a $\left[\frac{I_n}{n} > \varepsilon \right] = [I_n > n\varepsilon]$. Comme I_n est à valeurs entières, cela donne :

$$\left[\frac{I_n}{n} > \varepsilon \right] = [I_n \geq \lfloor n\varepsilon \rfloor + 1].$$

D'après la question 8.a), on obtient :

$$P\left(\frac{I_n}{n} > \varepsilon\right) = P(I_n \geq \lfloor n\varepsilon \rfloor + 1) = \left(\frac{n - \lfloor n\varepsilon \rfloor}{n} \right)^n.$$

Or : $\lfloor n\varepsilon \rfloor \geq n\varepsilon - 1$. Donc, $n - \lfloor n\varepsilon \rfloor \leq n - n\varepsilon + 1 = n(1 - \varepsilon) + 1$. Ainsi :

$$P\left(\frac{I_n}{n} > \varepsilon\right) \leq \left(1 - \varepsilon + \frac{1}{n} \right)^n.$$

- d) Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq P\left(\frac{I_n}{n} > \varepsilon\right) \leq \left(1 - \varepsilon + \frac{1}{n} \right)^n$.

Or, pour n assez grand, $-\varepsilon + \frac{1}{n} \leq -\frac{\varepsilon}{2}$. Donc, pour n assez grand,

$$P\left(\frac{I_n}{n} > \varepsilon\right) \leq \left(1 - \varepsilon + \frac{1}{n} \right)^n \leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{I_n}{n} > \varepsilon\right) = 0$. Comme $\frac{I_n}{n}$ est positive, on a :

$$P\left(\left| \frac{I_n}{n} - 0 \right| > \varepsilon\right) = P\left(\frac{I_n}{n} > \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc, par définition, $\frac{I_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0$.

9) Simulation.

- a) Pour simuler I_n , il suffit de simuler les variables aléatoires $X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n}$, puis d'en prendre le minimum.

On obtient donc :

```
def simul_I(n):
    X = rd.randint(1, n+1, n)
    I = np.min(X)
    return I
```

- b) Pour simuler N réalisations de la variable aléatoire $\frac{I_n}{n}$, on répète N fois la simulation précédente.

On obtient donc :

```
def simul(n,N):  
    L = np.zeros(N)  
    for k in range(N):  
        L[k] = simul_I(n) / n  
    return L
```

- c) Lorsque n devient grand, les valeurs du tableau doivent se rapprocher de 0.