

EXERCICE

Hypothèses.

$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
 $\forall A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$s_1(A) = \sum_{j=1}^3 A_{1,j}, \quad s_2(A) = \sum_{j=1}^3 A_{2,j}, \quad s_3(A) = \sum_{j=1}^3 A_{3,j} \quad (\text{somme des coefficients des lignes})$$

$$s_4(A) = \sum_{i=1}^3 A_{i,1}, \quad s_5(A) = \sum_{i=1}^3 A_{i,2}, \quad s_6(A) = \sum_{i=1}^3 A_{i,3} \quad (\text{somme des coefficients des colonnes})$$

$$s_7(A) = \sum_{i=1}^3 A_{i,i}, \quad s_8(A) = \sum_{i=1}^3 A_{i,4-i}, \quad (\text{somme des coefficients des diagonales})$$

$(k; l) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$, $E_{k,l}$ est la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls excepté celui situé à l'intersection de la k^{e} ligne et de la l^{e} colonne qui vaut 1.
 $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. $\mathcal{E} = \{A \mid A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), s_7(A) = 0\}$.

- (a) Soient $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $s_7(A + \lambda B) = s_7(A) = \sum_{i=1}^3 (A + \lambda B)_{i,i} = \sum_{i=1}^3 (A_{i,i} + \lambda B_{i,i})$
 $s_7(A + \lambda B) = \sum_{i=1}^3 A_{i,i} + \lambda \sum_{i=1}^3 B_{i,i} = s_7(A) + \lambda s_7(B)$ donc s_7 est une application linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Comme $E = \ker(s_7)$ que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$s_7(E_{1,1}) = 1$ donc $\dim(\text{im}(s_7)) = 1$, $\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = 9$, du théorème du rang on déduit que $\dim(\text{im}(s_7)) + \dim(\ker(s_7)) = 9$ et donc $\dim(\mathcal{E}) = 8$.

f est l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^8$ qui à toute matrice A fait correspondre le vecteur $f(A) = (s_1(A), s_2(A), s_3(A), s_4(A), s_5(A), s_6(A), s_7(A), s_8(A))$ de $\mathbb{R}^8$

2. (a) $\forall (i; j) \in \llbracket 1; 3 \rrbracket^2$, $A \mapsto A_{i,j}$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, or une combinaison d'applications linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ est linéaire donc, $(s_k)_{k \in \llbracket 1; 8 \rrbracket}$ est une famille d'applications linéaires de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
 Une application d'un espace vectoriel dans $\mathbb{R}^8$ dont toutes les composantes sont linéaire est linéaire donc

f est une application linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^8$.

- (b) $\mathcal{C} = (e_1; e_2; e_3; e_4; e_5; e_6; e_7; e_8)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^8$, $F = \underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{\text{mat}}(f)$.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. $\mathcal{G} = \{A \mid A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \forall k \in \llbracket 2; 8 \rrbracket s_k(A) = s_1(A)\}$

- (a) L'application $h : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^7$ telle que $\forall A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \forall k \in \llbracket 1; 7 \rrbracket, (h(A))_k = s_{k+1}(A) - s_1(A)$ est linéaire. $\mathcal{G} = \ker(h)$ donc

$\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- (b) Pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on a $\ll A \in \mathcal{G} \cap \mathcal{E} \gg \iff \ll h(A) = \mathbf{0}; s_7(A) = 0 \gg \iff \ll \forall k \in \llbracket 1; 7 \rrbracket s_{k+1}(A) = s_1(A); s_7(A) = 0 \gg \iff \ll \forall k \in \llbracket 1; 8 \rrbracket s_k(A) = 0 \gg \iff \ll f(A) = \mathbf{0} \gg$.
 Conclusion, $\ker(f) = \mathcal{G} \cap \mathcal{E}$.

(c) $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\boxed{\forall k \in \llbracket 1; 8 \rrbracket, s_k(J) = 3}$. Pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a

$$\ll A \in \mathcal{G} \gg \iff \ll A \in \ker(h) \gg \iff \ll \forall k \in \llbracket 1; 7 \rrbracket s_{k+1}(A) = s_1(A) \gg \iff$$

$$\ll \forall k \in \llbracket 1; 7 \rrbracket s_{k+1}(A) - s_{k+1}\left(\frac{1}{3}s_1(A)J\right) = s_1(A) - s_1\left(\frac{1}{3}s_1(A)J\right) = 0 \gg \iff$$

$$\ll \forall k \in \llbracket 1; 8 \rrbracket s_{k+1}\left(A - \frac{1}{3}s_1(A)J\right) = 0 \gg \iff$$

$$\ll A = B + \lambda J \text{ avec } B = A - \frac{1}{3}s_1(A)J, B \in \ker(f), \lambda = \frac{1}{3}s_1(A) \gg$$

Note : Si $A = B + \lambda J$ avec $B \in \ker(f)$ et $A \in \mathcal{G}$, alors $f(A) = 0 + \lambda f(J)$ avec $f(J) = 3$ donc $\lambda = \frac{1}{3}f(A) = \frac{1}{3}s_7(A) = \frac{1}{3}s_1(A)$.

Conclusion, $\boxed{\text{Tout \acute{e}l\'{e}ment de } \mathcal{G} \text{ s'\'{e}crit de mani\`{e}re unique comme la somme d'une matrice de } \ker(f) \text{ et d'une matrice de } \text{Vect}(J)}.$

on en d\'{e}duit que $\boxed{\dim(\mathcal{G}) = \dim(\ker(f)) + 1}$

(d) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & x \\ y & z & t \end{pmatrix}$. On a les \acute{e}quivalences

$$\ll f(A) = O_3 \gg \iff \ll \left\{ \begin{array}{l} a+b+c = 0 \\ d+e+x = 0 \\ y+z-t = 0 \\ a+d+y = 0 \\ b+e+z = 0 \\ c+x+t = 0 \\ a+e+t = 0 \\ c+e+y = 0 \end{array} \right. \gg \xrightarrow{L_4 \leftarrow -L_2 + L_4} \ll \left\{ \begin{array}{l} a+\underline{b}+c = 0 \\ L_2 \\ y+z-t = 0 \\ a-e-x+y = 0 \\ \underline{b}+e+z = 0 \\ c+x+t = 0 \\ a+e+t = 0 \\ c+e+y = 0 \end{array} \right. \gg \xrightarrow{L_5 \leftarrow -L_1 - L_5}$$

$$\ll \left\{ \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ y+z-t = 0 \\ a-e-x+y = 0 \\ a+c-e-z = 0 \\ c+x+t = 0 \\ a+e+t = 0 \\ c+e+y = 0 \end{array} \right. \gg \xrightarrow{L_5 \leftarrow -L_5 + L_3} \ll \left\{ \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ a-e-\underline{x}+y = 0 \\ a+c-e+y-t = 0 \\ c+\underline{x}+t = 0 \\ a+e+t = 0 \\ c+e+y = 0 \end{array} \right. \gg \xrightarrow{L_4 \leftarrow -L_4 + L_6}$$

$$\ll \left\{ \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ a+c-e+y+t = 0 \\ \underline{a}+c-e+y-t = 0 \\ L_6 \\ a+e+t = 0 \\ c+e+y = 0 \end{array} \right. \gg \xrightarrow{L_5 \leftarrow -L_4 - L_5, L_7 \leftarrow -L_4 - L_7} \ll \left\{ \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ 2\underline{t} = 0 \\ L_6 \\ c-2e+y-2\underline{t} = 0 \\ c+e+y = 0 \end{array} \right. \gg \xrightarrow{L_7 \leftarrow -L_5 + L_7}$$

$$\ll \left\{ \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_4 \\ L_6 \\ c-2e+y = 0 \\ \underline{c}+e+y = 0 \end{array} \right. \gg \xrightarrow{L_7 \leftarrow -L_7 - L_8} \ll \left\{ \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_4 \\ L_6 \\ -3\underline{e} = 0 \\ L_8 \end{array} \right. \gg \text{ donc}$$

$$\ll A \in \ker(f) \gg \iff \ll A = \begin{pmatrix} 0 & y & -y \\ -y & 0 & y \\ y & -y & 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \gg \text{ on a donc}$$

$\dim(\ker(f)) = 1$ et du th\'{e}or\`{e}me du rang

$\dim(\text{im}(f)) = \dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) - \dim(\ker(f)) = 9 - 1 = 8$ c'est \`{a} dire que

le rang de l'application f est 8].

(e) $\dim(\ker(f)) = 1$ et $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\ker(f)$

Note, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{G}$, l'espace vectoriel des matrices magiques d'ordre 3.

PROBLEME

$$\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Première partie

Un équivalent d'une intégrale

1. Hypothèse, $N : [0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 - 2x - 2(1-x) \ln(1-x)$

(a) $[0; 1[\rightarrow]0; 1]$ est de classe C^∞ , $\ln$ est de classe C^∞ sur $]0; +\infty[$, la composée

$[0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ , la fonction polynôme $x \mapsto -2(1-x)$ est de classe C^∞
 $x \mapsto \ln(1-x)$

le produit $[0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ , $x \mapsto x^2 - 2x$ est de classe C^∞ , la

différence N est de classe C^∞ donc de classe C^1 sur $[0; 1[$.

(b) Soit $d : [0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ on a $\forall x \in]0; 1[$, $d'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} < 0$ donc d est strictement décroissante continue en 0, et comme $d(0) = 0$ on déduit que

$\forall x \in]0; 1[$, $\ln(1-x) + x < 0$
 et $\forall x \in [0; 1[$, $\ln(1-x) \leq -x$.

(c) $\forall x \in]0; 1[$, $N'(x) = 2x - 2 + 2 \ln(1-x) - 2(1-x) \frac{-1}{1-x} = 2(x + \ln(1-x)) < 0$.

$\forall x \in]0; 1[$, $N'(x) < 0$.

(d) Du cours $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = 0$, pour $t = 1-x$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \ln(1-x) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} N(x) = 1 - 2 = -1$,

or $\lim_{x \rightarrow 0^+} N(x) = 0$ et de la décroissance de N on déduit que $\forall x \in]0; 1[$, $-1 < N(x) < 0$.

2. Hypothèse, $f :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto -2 \frac{x + \ln(1-x)}{x^2}$

(a) Pour $x \in [0; 1[$, $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

(b) Pour $x \in [0; 1[$, $x + \ln(1-x) = x - x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) = -\frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ donc

$f(x) = -2 \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{-2}{x^2} \left(-\frac{x^2}{2} \right) = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, donc

$$f :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} -2 \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{est le prolongement par continuité de } f \text{ en } 0.$$

(c) Pour $x \in]0; 1[$, on a :

$$f'(x) = -2 \frac{1}{x^3} \left(\left(1 + \frac{-1}{1-x} \right) x - 2(x + \ln(1-x)) \right) = -2 \frac{1}{x^3} \left(\frac{-x^2}{1-x} - 2(x + \ln(1-x)) \right) - 2.$$

$$f'(x) = -2 \frac{1}{x^3} \left(\frac{-x^2 - 2(1-x)(x + \ln(1-x))}{1-x} \right) = \frac{-2}{x^3(1-x)} (x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x))$$

Conclusion, $\forall x \in]0; 1[$, $f'(x) = -2 \frac{N(x)}{x^3(1-x)} > 0$, voir 1.(d).

(d)

x	0	1
$f(x)$	1	$+\infty$

On a pour $x \in]0; 1[$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) = -\infty$ donc $x + \ln(1-x) \sim \ln(1-x)$ donc

$$f(x) = -2 \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} \sim_{x \rightarrow 1^-} -2 \frac{\ln(1-x)}{x^2} \sim_{x \rightarrow 1^-} -2 \ln(1-x) \text{ c'est à dire que } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty.$$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0; 1[$, $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ du

théorème de la bijection $\begin{matrix}]0; 1[& \rightarrow & [1; +\infty[\\ x & \mapsto & f(x) \end{matrix}$ est bijective.

3. Hypothèse, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; 1[, g_n(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2} f(x)\right)$

(a) Le produit des fonctions continues $x \mapsto -\frac{nx^2}{2}$ et f est continu sur $[0; 1[$, la composée avec $\exp$ est continue donc g_n est continue, et comme $\forall x \in [0; 1[, f(x) \geq 1$ pour $x \in [0; 1[, \frac{nx^2}{2} f(x) \geq 0$ donc $-\frac{nx^2}{2} f(x) \leq 0$ d'où $\forall x \in [0; 1[$ $0 < g_n(x) \leq 1$. Comme $x \mapsto 1$ est intégrable sur $[0; 1[$ on

déduit que g_n est intégrable sur $[0; 1[$ donc l'intégrale $\int_0^1 g_n(x) dx$ existe dans $\mathbb{R}$.

Hypothèse $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^1 g_n(x) dx$.

(b) Pour $x \in [0; 1[, f(x) \geq 1$ donc $-\frac{nx^2}{2} f(x) \leq -\frac{nx^2}{2}$, comme $\exp$ est strictement croissante sur on a $0 \leq g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right)$.

(c) En intégrant l'inégalité sur $[0; 1[$ on obtient,

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right) dx \underset{t=\sqrt{n}x}{=} \int_0^{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \frac{dt}{\sqrt{n}} = \left[\sqrt{\frac{2\pi}{n}} \Phi(t) \right]_0^{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} (\Phi(\sqrt{n}) - \frac{1}{2})$$

donc $0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}} (\Phi(\sqrt{n}) - \frac{1}{2})$

(d) La fonction Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1$ donc Φ est majorée par 1

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}} (1 - \frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

4. Hypothèse, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1}{\ln(n+2)}$

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 < e < 3 \leq n+2$ et de la croissance de $\ln$, $1 = \ln(e) < \ln(n+2)$. La fonction

$t \mapsto \frac{1}{t}$ étant strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ on déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < v_n < 1$.

- (b) Hypothèse, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = f(v_n)}$. De $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+2) = +\infty$, $v_n = \frac{1}{\ln(n+2)}$ on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ or $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ et $w_n = f(v_n)$ la limite de la composée est donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = f(0) = 1$. Conclusion, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1}$.

- (c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a établi que $g_n > 0$ et g_n est intégrable sur $[0; 1]$, $0 < v_n < 1$ donc

$$I_n = \int_0^1 g_n(x) dx \geq \int_0^{v_n} g_n(x) dx, \text{ or } f \text{ est positive strictement croissante sur } [0; 1], \text{ donc pour } x \in [0; v_n],$$

$$\frac{nx^2}{2} f(x) \leq \frac{nx^2}{2} f(v_n) = \frac{nx^2}{2} w_n \text{ donc } g_n(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2} f(x)\right) \geq \exp\left(-\frac{nx^2}{2} w_n\right) \text{ d'où}$$

$$\int_0^{v_n} g_n(x) dx \geq \int_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2} w_n\right) dx \underset{u=x\sqrt{nw_n}}{=} \int_0^{v_n\sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \frac{du}{\sqrt{nw_n}} \text{ donc}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n &\geq \frac{1}{\sqrt{nw_n}} \int_0^{v_n\sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \sqrt{\frac{2\pi}{nw_n}} \int_0^{v_n\sqrt{nw_n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\ I_n &\geq \sqrt{\frac{2\pi}{nw_n}} \left(\Phi(v_n\sqrt{nw_n}) - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}}$$

- (d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{de 3.(d) } I_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \text{ soit encore } I_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \leq 1$$

$$\text{de 4.(c) on a, } \sqrt{\frac{2\pi}{nw_n}} \left(\Phi(v_n\sqrt{nw_n}) - \frac{1}{2} \right) \leq I_n \text{ soit } \frac{2}{\sqrt{w_n}} \left(\Phi(v_n\sqrt{nw_n}) - \frac{1}{2} \right) \leq I_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

$$\text{donc, } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{2}{\sqrt{w_n}} \left(\Phi(v_n\sqrt{nw_n}) - \frac{1}{2} \right) \leq I_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \leq 1}$$

- (e) De 4.(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$, $v_n\sqrt{nw_n} = \frac{\sqrt{n}}{\ln(2+n)} \sqrt{w_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(v_n\sqrt{nw_n}) = 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{w_n}} \left(\Phi(v_n\sqrt{nw_n}) - \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{\sqrt{1}} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 1$$

$$\text{et de l'encadrement précédent on déduit que } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}} = 1, \boxed{I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

Deuxième partie

Quelques propriétés asymptotiques de la loi de Poisson

On utilise les notations de la Partie I.

1. Hypothèse, $\boxed{\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}, J_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt}$ Note : $J_0(x) = 1 - e^{-x}$.

- (a) Pour $x > 0$, $J_1(x) = \int_0^x t e^{-t} dt = [t(-e^{-t})]_0^x - \int_0^x 1(-e^{-t}) dt = [t(-e^{-t}) - e^{-t}]_0^x$, donc

$$\boxed{\forall x > 0, J_1(x) = 1 - (x+1)e^{-x}}$$

- (b) Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt = \frac{1}{n!} \left([t^n(-e^{-t})]_0^x - \int_0^x n t^{n-1}(-e^{-t}) dt \right)$

$$J_n(x) = \frac{1}{n!} \left(-x^n e^{-x} + n \int_0^x t^{n-1} e^{-t} dt \right).$$

Conclusion, $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, J_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{1}{n!}x^n e^{-x}$.

(c) Pour $x > 0, n \in \mathbb{N}^*, J_n(x) - J_0(x) = \sum_{k=1}^n (J_k(x) - J_{k-1}(x)) = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{k!}x^k e^{-x}\right)$ donc
 $J_n(x) = J_0(x) - e^{-x} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k!}x^k\right) = 1 - e^{-x} - e^{-x} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}x^k = e^{-x} \left(e^x - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}x^k\right)$.

Conclusion, $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}, J_n(x) = e^{-x} \left(e^x - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}x^k\right) = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}x^k e^{-x}$.

(d) Pour $n \in \mathbb{N}, x > 0$,

$$J_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k e^{-x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} J_n(x) = 1$. D'autre part $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue positive sur $[0; +\infty[$ donc J_n est une

fonction croissante sur $[0; +\infty[$ majorée par 1 donc $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$.

(e) Pour $n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^1 g_n(x) dx = \int_0^1 \exp\left(-\frac{nx^2}{2} f(x)\right) dx$ en faisant le changement de variable

$$t = n(1-x), \text{ donc } x = 1 - \frac{t}{n}, dx = -\frac{dt}{n}$$

$$I_n = \int_n^0 \exp\left(-\frac{n(1-\frac{t}{n})^2}{2} f\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \left(-\frac{dt}{n}\right) = \int_0^n a(t) dt \text{ avec}$$

$$\text{or pour } t \in [0; n], a(t) = \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n(1-\frac{t}{n})^2}{2} f\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right)$$

$$a(t) = \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n(1-\frac{t}{n})^2}{2} \left(-2 \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right) + \ln\left(1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)\right)}{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^2}\right)\right)$$

$$a(t) = \frac{1}{n} \exp\left(n \left(\left(1 - \frac{t}{n}\right) + \ln\left(\frac{t}{n}\right)\right)\right) = \frac{1}{n} \exp\left(n - t + n \ln\left(\frac{t}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} e^n e^{-t} \left(\frac{t}{n}\right)^n = \frac{e^n}{n^{n+1}} t^n e^{-t}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = n! \frac{e^n}{n^{n+1}} J_n(n)$

Hypothèse, $\bullet (X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont des variables aléatoires indépendantes, sur l'espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$, de loi $\mathcal{P}(1)$

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

2. (a) S_n est la somme de variables aléatoire indépendantes qui suivent une loi de Poisson donc S_n suit la loi de Poisson de paramètre la somme des paramètres, donc $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n), \forall k \in \mathbb{N}$,
 $P(S_n = k) = \frac{n^k}{k!} e^{-n}$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(S_n \leq n) = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} e^{-n} \underset{1.(c)}{=} 1 - J_n(n), P(S_n \geq n) = 1 - P(S_n \leq n-1) = J_{n-1}(n)$.

3. Hypothèse, $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^n e^{-x}$

- (a) h_n est de classe C^∞ . Pour $x \geq 0, h_n(x) = x^n e^{-x}, h'_n(x) = x^{n-1}(n e^{-x} - x e^{-x}) = (n-x)x^{n-1} e^{-x}$, $h'_n(x)$ est du signe de $x(n-x)$ d'où le tableau de variation :

x	0	n	$+\infty$
$\text{signe}(h'_n(x))$	0	+	-
$h_n(x)$	0	$n^n e^{-n}$	0

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la définition des J_k on a

$$\begin{aligned}
 P(S_{n+1} \leq n+1) - P(S_n \leq n) &= (1 - J_{n+1}(n+1)) - (1 - J_n(n)) = J_n(n) - J_{n+1}(n+1) \\
 &= J_n(n) - J_{n+1}(n) + J_{n+1}(n) - J_{n+1}(n+1) \stackrel{1.(b)}{=} \frac{1}{(n+1)!} n^{n+1} e^{-(n+1)} + J_{n+1}(n) - J_{n+1}(n+1) \\
 &= \frac{1}{(n+1)!} h_{n+1}(n) - \frac{1}{(n+1)!} \int_n^{n+1} h_{n+1}(t) dt = -\frac{1}{(n+1)!} \int_n^{n+1} (h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n)) dt
 \end{aligned}$$

conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(S_{n+1} \leq n+1) - P(S_n \leq n) = -\frac{1}{(n+1)!} \int_n^{n+1} (h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n)) dt$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, h_{n+1} est croissante sur $[n; n+1]$ donc $\forall t \in [n; n+1]$, $h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n) \geq 0$ et de 3.(b) on déduit que $P(S_{n+1} \leq n+1) - P(S_n \leq n) \leq 0$.

Conclusion $\boxed{\text{la suite } (P(S_n \leq n))_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}.$

(d) Pour $n \in \llbracket 1; +\infty \rrbracket$, $P(S_{n+1} \geq n+1) - P(S_n \geq n) = J_n(n+1) - J_{n-1}(n)$

$$\begin{aligned}
 &= J_n(n+1) - J_n(n) + J_n(n) - J_{n-1}(n) \\
 &\stackrel{1.(b)}{=} \frac{1}{n!} \int_n^{n+1} t^n e^{-t} dt - \frac{1}{n!} n^n e^{-n} = \frac{1}{n!} \int_n^{n+1} (h_n(t) - h_n(n)) dt \leq 0 \text{ car } h_n \text{ est décroissante sur } [n; n+1].
 \end{aligned}$$

Conclusion. $\boxed{\text{la suite } (P(S_n \geq n))_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}.$

(e) Les deux suites $(P(S_n \leq n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(P(S_n \geq n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont décroissantes minorée par 0 donc convergent.

4. (a) Théorème de la limite centrée : Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont des variables aléatoires indépendantes, de même loi, d'espérance m et d'écart type σ alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^n X_k - nm\right) \leq t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(t)$$

Ici $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$, $m = E(X_n) = 1 = \sigma_{X_n} = \sigma$, donc

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^n X_k - nm\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} (S_n - n).$$

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*, P(S_n \leq n) = P(S_n - n \leq 0) = P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} (S_n - n) \leq 0\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

Conclusion, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \leq n) = \frac{1}{2}}$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \underset{\text{P1 4.(e)}}{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim}} I_n \stackrel{\text{P2 1.(e)}}{=} n! \frac{e^n}{n^{n+1}} J_n(n) \stackrel{\text{P2 2.(b)}}{=} n! \frac{e^n}{n^{n+1}} (1 - P(S_n \leq n)) \underset{\text{P2 4.}}{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim}} n! \frac{e^n}{n^{n+1}} \frac{1}{2}$

donc $\boxed{n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \frac{2n^{n+1}}{e^n} = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}}$

(c) En utilisant (b), pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{P(S_n = n) = \frac{n^n}{n!} e^{-n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^n}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}} e^{-n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}}$.

(d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n \geq n) = 1 - P(S_n \leq n-1) = 1 - P(S_n \leq n) + P(S_n = n)$

De 4.(a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \leq n) = \frac{1}{2}$ et de 4.(b), $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = n) = 0$ donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \geq n) = \frac{1}{2}}$

Troisième partie

Médianes. Cas des variables aléatoires discrètes et des variables aléatoires à densité

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de fonction de répartition F .

On appelle médiane de X , tout réel m vérifiant les deux conditions : $P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$ et $P(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$.

On admet qu'un tel réel m existe toujours.

Remarque. $d(x) = P(X \leq x) - P(X \geq x) = 2P(X \leq x) - P(X = x) - 1 = 2P(X < x) + P(X = x) - 1$, d est croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} d(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = 1$

pour a_0 tel que $d(a_0) < 0$ et b_0 tel que $d(b_0) > 0$ on construit deux suites adjacentes $(a_n)_n \nearrow$ et $(b_n)_n \searrow$ convergente vers m avec en utilisant la méthode de dichotomie.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $d(a_n) \leq 0$, $d(b_n) \geq 0$. F étant continue à droite $0 \leq 2P(X < m) - 1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} d(a_n) \leq d(m) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} d(b_n) \leq 2P(X \leq m) - 1 \leq 0$ d'où $d(m) = 0$, on en déduit l'existence d'une médiane.

1. On a $\mathbb{N} \in \mathbb{N}^*$, type proba=array[1..N] of real.

X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\llbracket 1; N \rrbracket$. On suppose que la loi de X est stockée dans une variable loi de type proba.

Fonction qui renvoie une médiane de X

```
function mediane(loi:proba):real;
var k:integer;s:real;
Begin
k:=0;s:=0;while s<1/2 do
begin
k:=k+1;s:=s+loi[k]
end;mediane=k;
```

2. Hypothèse, X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance $E(X)$.

$$(a) \text{ Pour } r \in \mathbb{N}^*, E(|X - r|) = \sum_{n=0}^{+\infty} |n - r| P(X = n) = \sum_{n=0}^{r-1} (r - n) P(X = n) + \sum_{n=r}^{+\infty} (n - r) P(X = n)$$

$$E(|X - r|) = 2 \sum_{n=0}^{r-1} (r - n) P(X = n) + \sum_{n=0}^{+\infty} (n - r) P(X = n) = 2 \sum_{n=0}^{r-1} (r - n) P(X = n) + E(X) - r$$

$$\text{Conclusion, } E(|X - r|) = E(X) - r + 2 \sum_{k=0}^{r-1} (r - k) P(X = k).$$

- (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{r-1} (r - k) P(X = k) &= \sum_{k=0}^{r-1} (r - k) (F(k) - F(k-1)) = \sum_{k=0}^{r-1} (r - k) F(k) - \sum_{k=0}^{r-1} (r - k) F(k-1) \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} (r - k) F(k) - \sum_{k=1}^{r-1} (r - k) F(k-1) = \sum_{k'=k-1}^{r-1} (r - k) F(k) - \sum_{k'=0}^{r-2} (r - k' - 1) F(k') \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} (r - k) F(k) - \sum_{k=0}^{r-1} (r - k - 1) F(k) = \sum_{k=0}^{r-1} F(k) \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion, } \forall r \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{r-1} F(k) = \sum_{k=0}^{r-1} (r - k) P(X = k).$$

$$\text{De (a) } E(|X - r|) = E(X) - r + 2 \sum_{k=0}^{r-1} (r - k) P(X = k) = E(X) - 2 \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{2} + 2 \sum_{k=0}^{r-1} F(k)$$

$$\text{d'où } \forall r \in \mathbb{N}^*, E(|X - r|) = E(X) + 2 \sum_{k=0}^{r-1} \left(F(k) - \frac{1}{2}\right)$$

(c) Hypothèse, $\boxed{m \text{ est une médiane de } X, m \in \mathbb{N}^*}$.

$$\begin{aligned} \text{Pour } r \in \mathbb{N}^*, E(|X - r|) - E(|X - m|) &= E(X) + 2 \sum_{k=0}^{r-1} (F(k) - \frac{1}{2}) - \left(E(X) + 2 \sum_{k=0}^{m-1} (F(k) - \frac{1}{2}) \right) \\ &= 2 \left(\sum_{k=0}^{r-1} (F(k) - \frac{1}{2}) - \sum_{k=0}^{m-1} (F(k) - \frac{1}{2}) \right) \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ Si } r > m, E(|X - r|) - E(|X - m|) = 2 \sum_{k=m}^{r-1} \underbrace{\left(F(k) - \frac{1}{2} \right)}_{\geq 0} \geq 0$$

$$\bullet \text{ Si } r = m, E(|X - r|) - E(|X - m|) = 0$$

$$\bullet \text{ Si } r < m, E(|X - r|) - E(|X - m|) = -2 \sum_{k=r}^{m-1} \underbrace{\left(F(k) - \frac{1}{2} \right)}_{\leq 0} \geq 0 \text{ donc}$$

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{N}^*, E(|X - r|) - E(|X - m|) \geq 0}.$$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{L'application } \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ r & \mapsto & E(|X - r|) \end{array} \text{ a un minimum en } m}.$$

(d) Hypothèse, $\boxed{n \in \mathbb{N}^*, X \hookrightarrow \mathcal{P}(n), X = S_n}$.

$$\bullet \text{ En PII 3.(c)\&4(a) } (P(S_n \leq n))_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante vers } \frac{1}{2} \text{ donc } P(S_n \leq n) \geq \frac{1}{2}$$

$$\bullet \text{ En PII 3.(d)\&4(d) } (P(S_n \geq n))_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante vers } \frac{1}{2} \text{ donc } P(S_n \geq n) \geq \frac{1}{2}$$

Conclusion, $\boxed{n \text{ est une médiane de } X}$.

$$\bullet \text{ De PII 4.c } P(S_n = n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

$$\bullet \text{ De PIII 2.(a) si } r \in \mathbb{N}^*, E(|X - r|) = E(X) - r + 2 \sum_{k=0}^{r-1} (r - k) P(X = k) \text{ donc pour } r = n$$

$$E(|X - n|) = 2 \sum_{k=0}^{n-1} (n - k) P(X = k) = 2 \sum_{k=0}^{n-1} (n - k) \frac{n^k}{k!} e^{-n} = 2e^{-n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^{k+1}}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n^k}{(k-1)!} \right)$$

$$E(|X - n|) = 2e^{-n} \frac{n^n}{(n-1)!} = 2ne^{-n} \frac{n^n}{n!} = 2nP(S_n = n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}.$$

$$\text{Conclusion, } \boxed{E(|X - n|) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2n}{\pi}}}.$$

3. Hypothèses,

X est une variable aléatoire à densité dont une densité f est continue sur $\mathbb{R}$.

F est la fonction de répartition de X

$$\begin{array}{ccc} X \text{ admet une espérance } E(X), M : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & E(|X - x|) \end{array}$$

$$(a) \text{ Pour } x \geq 0 \text{ soit } u \geq x, \int_x^u tf(t) dt = [t(F(t) - F(x))]_x^u - \int_x^u (F(t) - F(x)) dt \geq [t(F(t) - F(x))]_x^u$$

en faisant tendre u vers $+\infty$ l'encadrement on déduit que

$$\boxed{0 \leq x(1 - F(x)) \leq \int_x^{+\infty} tf(t) dt = E(X) - \int_{-\infty}^x tf(t) dt}$$

$$\text{et comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x tf(t) dt = E(X) \text{ on déduit que } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F(x)) = 0}.$$

$P(-X \leq x) = P(X > -x) = 1 - P(X \leq -x) = 1 - F(-x)$ donc $-X$ est une variable à densité de densité $x \mapsto f(-x)$ et de fonction de répartition $x \mapsto 1 - F(-x)$ donc, en utilisant le résultat précédent à la variable aléatoire $-X$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - (1 - F(-x))) = 0$, c'est à dire

$$\text{que } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} xF(x) = 0}.$$

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$, $M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t-x| f(t) dt = \int_{-\infty}^x (x-t) f(t) dt + \int_x^{+\infty} (t-x) f(t) dt$

$$= [(x-t)F(t)]_{-\infty}^x - \int_{-\infty}^x (-1)(F(t)) dt + [(t-x)(F(t)-1)]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} (F(t)-1) dt$$

De $\lim_{x \rightarrow -\infty} xF(x) = 0$ on déduit que $[(x-t)F(t)]_{-\infty}^x = 0$, et de $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1-F(x)) = 0$

on déduit que $[(t-x)(F(t)-1)]_x^{+\infty} = 0$ donc

$$M(x) = \int_{-\infty}^x F(t) dt + \int_x^{+\infty} (1-F(t)) dt$$

(c) Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $M(b) - M(a) = \int_{-\infty}^b F(t) dt + \int_b^{+\infty} (1-F(t)) dt - \left(\int_{-\infty}^a F(t) dt + \int_a^{+\infty} (1-F(t)) dt \right)$

$$= \int_a^b F(t) dt + \int_b^a (1-F(t)) dt = \int_a^b (2F(t) - 1) dt$$

Conclusion, $\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2, M(b) - M(a) = \int_a^b (2F(t) - 1) dt$.

(d) m est une médiane de X .

Pour $t \geq m$ $F(t) \geq \frac{1}{2}$, donc pour $b \geq m$, $M(b) - M(m) = \int_m^b (2F(t) - 1) dt \geq 0$

Pour $t \leq m$ $F(t) \leq \frac{1}{2}$, donc pour $a \leq m$, $M(m) - M(a) = \int_a^m (2F(t) - 1) dt \leq 0$, donc $\forall c \in \mathbb{R}$

, $M(c) - M(m) \geq 0$

Conclusion, M atteint son minimum en m , où m est une médiane de X .